

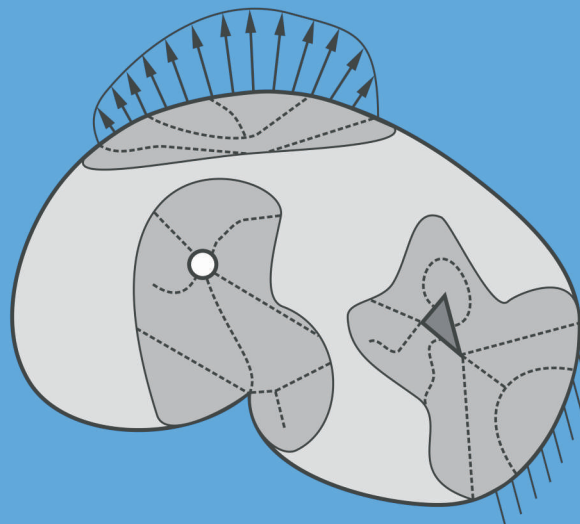


MECHANIK

FORSCHUNGSBERICHT

# Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

Jochen Hebel



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Band 22

# Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Jochen Hebel**

aus

Kirchen (Sieg)

|                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| Referent:                   | Prof. Dr.-Ing. W. Becker |
| Korreferent:                | Prof. Dr.-Ing. R. Müller |
| Tag der Einreichung:        | 24.02.2010               |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 27.04.2010               |

Darmstadt 2010

Hebel, Jochen

**Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen  
mit der Bruchmechanik finiter Risse**

Forschungsbericht Mechanik, Technische Universität Darmstadt

Band 22

**Herausgeber:**

Studienbereich Mechanik

Technische Universität Darmstadt

Hochschulstraße 1

64289 Darmstadt

Germany

© 2010 Jochen Hebel

Am Steinhäuschen 10

57567 Daaden

Germany

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Werk ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

Dieses Dokument wird bereitgestellt von [TUPRINTS](#), dem E-Publishing-Service der Technischen Universität Darmstadt:

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-23046](#)

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2304/>

ISBN 978-3-935868-22-8

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt entstanden.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei allen, die zum Gelingen beigetragen haben. Mein besonderer Dank an dieser Stelle gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Becker für die stets wohlwollende Förderung und Begleitung sowie für konstruktive Diskussionen und Gespräche. Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Müller danke ich für sein entgegengebrachtes Interesse an meiner Arbeit, für wertvolle Anregungen sowie für die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Außerdem möchte ich allen Kollegen danken. Das angenehme Betriebsklima und die tägliche Bereitschaft zur gegenseitigen Hilfestellung bei der Lösung verschiedenster Aufgaben haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ein weiterer Dank gilt allen studentischen Mitarbeitern für deren wertvolle und tatkräftige Unterstützung in Forschung und Lehre.

Ganz herzlich danke ich meiner Familie für alle ihre Unterstützung und Geduld.

Daaden, im Oktober 2010

Jochen Hebel



*Meinen Eltern*

# Inhaltsverzeichnis

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Symbolverzeichnis</b>   | <b>IX</b>   |
| <b>Kurzfassung</b>   | <b>XVII</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>XIX</b>  |
| <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>    |
| Stand der Forschung . . . . .  | 4           |
| Ziele und Aufbau der Arbeit . . . . .                                  | 9           |
| <b>1 Theoretische Grundlagen</b>                                       | <b>11</b>   |
| 1.1 Lineare Elastizitätstheorie . . . . .                              | 11          |
| 1.1.1 Grundgleichungen . . . . .                                       | 11          |
| 1.1.2 Energiebetrachtungen . . . . .                                   | 15          |
| 1.1.3 Ebene Probleme . . . . .   | 17          |
| 1.2 Mechanik ebener Lamine . . . . .                                   | 17          |
| 1.2.1 Klassische Laminattheorie . . . . .                              | 17          |
| 1.2.2 Laminat-Randeffekt . . . . .                                     | 23          |
| 1.3 Lösungsverfahren für Randwertprobleme . . . . .                    | 26          |
| 1.3.1 Komplexe Methode . . . . .                                       | 26          |
| 1.3.2 Finite-Elemente-Methode . . . . .                                | 28          |
| 1.4 Grundlagen der Bruchmechanik . . . . .                             | 31          |
| 1.4.1 Klassische Festigkeitshypothesen . . . . .                       | 31          |
| 1.4.2 Laminatfestigkeit . . . . .                                      | 32          |
| 1.4.3 Asymptotische Felder an Rissen und Multimaterialkerben . . . . . | 34          |
| 1.4.4 Lineare Bruchmechanik . . . . .                                  | 39          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>2</b> | <b>Hybrides Versagensmodell</b>   | <b>43</b> |
| 2.1      | Bruchkriterium . . . . .  | 43        |
| 2.1.1    | Grenzfälle . . . . .  | 45        |
| 2.2      | Asymptotische Formulierungen . . . . .                                  | 47        |
| 2.2.1    | Kreisloch . . . . .   | 47        |
| 2.2.2    | Spitzkerbe . . . . .  | 49        |
| 2.3      | Direkte numerische Formulierung . . . . .                               | 50        |
| 2.3.1    | Finite-Elemente-Implementierung . . . . .                               | 50        |
| 2.3.2    | Berechnung der Bruchlast . . . . .                                      | 54        |
| <b>3</b> | <b>Bewertung exemplarischer Spannungskonzentrationen</b>                | <b>59</b> |
| 3.1      | Kerben in Proben aus PMMA . . . . .                                     | 59        |
| 3.1.1    | Zugproben mit Kreisloch . . . . .                                       | 59        |
| 3.1.2    | Gekerbte Biegeproben unter gemischter Beanspruchung . . . . .           | 63        |
| 3.1.3    | Gekerbte Zugproben unter gemischter Beanspruchung . . . . .             | 65        |
| 3.2      | CFK-Laminatränder . . . . .   | 67        |
| 3.2.1    | Quasi-räumliche Modellierung . . . . .                                  | 68        |
| 3.2.2    | Symmetrische Kreuzverbunde unter uniaxialem Zug . . . . .               | 69        |
| 3.2.3    | Symmetrische Winkelverbunde unter uniaxialem Zug . . . . .              | 69        |
| <b>4</b> | <b>Anwendung auf Fügungen in Hochtemperatur-Brennstoffzellenstapeln</b> | <b>73</b> |
| 4.1      | Problemstellung . . . . .   | 73        |
| 4.1.1    | Oxidkeramische Hochtemperatur-Brennstoffzellen . . . . .                | 74        |
| 4.1.2    | Fügungen in SOFC-Stapeln . . . . .                                      | 77        |
| 4.2      | Analyse des Ausgangsentwurfs . . . . .                                  | 81        |
| 4.2.1    | Finite-Elemente-Modellierung . . . . .                                  | 81        |
| 4.2.2    | Bruchmechanische Bewertung . . . . .                                    | 82        |
| 4.3      | Analyse alternativer Entwürfe . . . . .                                 | 85        |
| 4.3.1    | Variation der Materialdaten . . . . .                                   | 85        |
| 4.3.2    | Variation der Függeometrie . . . . .                                    | 87        |
| <b>5</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                     | <b>91</b> |

---

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| <b>A Materialdaten</b>        | <b>95</b> |
| A.1 PMMA . . . . .            | 95        |
| A.2 CFK . . . . .             | 95        |
| A.3 SOFC-Werkstoffe . . . . . | 96        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>97</b> |



# Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

|      |  |
|------|--|
| AFC  | alkaline fuel cell                     |
| APU  | auxiliary power unit                   |
| BEM  | boundary element method                |
| BZ   | Brennstoffzelle                        |
| CFK  | kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff |
| CFRP | carbon-fibre-reinforced plastic        |
| ESZ  | ebener Spannungszustand                |
| EVZ  | ebener Verzerrungszustand              |
| FC   | fuel cell                              |
| FEA  | Finite-Elemente-Analyse                |
| FEM  | Finite-Elemente-Methode                |
| FPF  | first ply failure                      |
| FZ   | Forschungszentrum                      |
| GuD  | Gas- und Dampfturbinen                 |
| KW   | Kraftwerk                              |
| LPF  | last ply failure                       |
| LSZ  | longitudinaler Schubspannungszustand   |
| MEA  | membrane electrode assembly            |
| MCFC | molten carbonate fuel cell             |
| PAFC | phosphoric acid fuel cell              |
| PEFC | proton exchange membrane fuel cell     |
| PMMA | Polymethylmethacrylat (Plexiglas)      |
| PVC  | Polyvinylchlorid                       |
| SOFC | solid oxide fuel cell                  |
| XFEM | extended finite element method         |
| YSZ  | yttriumstabilisiertes Zirkonoxid       |

## Schreibweisen und Indizes

|                  |   |
|------------------|---|
| $(\dots)_\alpha$ | Index 1, 2                                |
| $(\dots)_i$      | Index 1, 2, 3                             |
| $(\dots)_A$      | Index 1, 2, $\dots$ , 6                   |
| $(\dots)$        | Zeitableitung                             |
| $(\dots)_{,i}$   | partielle Ableitung nach $x_i$            |
| $(\dots)'$       | Ableitung nach dem komplexen Argument $z$ |
| $(\dots)_{Ref}$  | Referenzwert                              |

## Lateinische Buchstaben

|                    |   |
|--------------------|---|
| $a$                | Risslänge   |
| $a_c$              | Länge des überbeanspruchten Bereichs                              |
| $a_{cn}$           | Länge des überbeanspruchten Bereichs in der $n$ -ten Iteration    |
| $a_{eff}$          | effektive Risslänge   |
| $a_f$              | Länge des gebildeten Risses                                       |
| $a_{max}$          | mögliche Risslänge hinsichtlich des Festigkeitskriteriums         |
| $a_{min}$          | erforderliche Risslänge hinsichtlich des energetischen Kriteriums |
| $A$                | Fläche  |
| $A_{ij}$           | Dehnsteifigkeiten   |
| $A_n$              | Feldkoeffizienten   |
| $b_F$              | Breite der Fügung   |
| $B$                | Scheibenbreite  |
| $\mathbf{B}$       | Matrix der Ableitungen der Formfunktionen                         |
| $B_{ij}$           | Kopplungssteifigkeiten  |
| $B_n$              | Feldkoeffizienten   |
| $c$                | Feuchtigkeits-Massenkonzentration                                 |
| $c_0$              | Ausgangs-Feuchtigkeits-Massenkonzentration                        |
| $c_{ijkl}$         | Komponenten des Elastizitätstensors                               |
| $C_{AB}$           | Komponenten der Elastizitätsmatrix                                |
| $d_F$              | Dicke der Fügung  |
| $D_{ij}$           | Biegesteifigkeiten  |
| $e$                | Schichtdicke  |
| $\tilde{e}$        | spezifische innere Energie  |
| $e_{ij}$           | Komponenten des Deviators des linearisierten Verzerrungstensors   |
| $E$                | innere Energie  |
| $\mathbf{E}$       | Elastizitätsmatrix  |
| $E, E_1, E_2, E_3$ | Elastizitätsmoduln  |
| $\mathcal{E}^{as}$ | relativer Fehler der asymptotischen Lösung                        |
| $\mathbf{f}$       | Volumenkraftvektor  |

|  |  |
|--|--|
| $f_i$  | Komponenten des Volumenkraftvektors  |
| $\hat{f}_\alpha^{(1)}(\varphi), \hat{f}_\alpha^{(2)}(\varphi)$                   | Verschiebungsfeld-Umfangsverteilungen bei Spitzkerben  |
| $\tilde{f}_{\alpha\beta}^{(1)}(\varphi), \tilde{f}_{\alpha\beta}^{(2)}(\varphi)$ | Spannungsfeld-Umfangsverteilungen bei Spitzkerben  |
| $F$  | Kraft  |
| $F(r/R)$   | tabellierte Funktion   |
| $F(x, y)$  | Airysche Spannungsfunktion   |
| $F(\sigma_{ij})$   | Funktion der Spannungen  |
| $F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right)$  | Funktion der Spannungen im Zustand ohne Riss   |
| $F_i, F_{ij}$  | Koeffizienten der Tsai-Wu-Versagensfläche  |
| $F_y$  | Kraft in $y$ -Richtung   |
| $G(\varepsilon_{ij})$  | Funktion der Verzerrungen  |
| $G, G_{23}, G_{13}, G_{12}$  | Schubmoduln  |
| $\mathcal{G}$  | differentielle Energiefreisetzungsrate   |
| $\bar{\mathcal{G}}$  | inkrementelle Energiefreisetzungsrate  |
| $\bar{\mathcal{G}}_I, \bar{\mathcal{G}}_{II}, \bar{\mathcal{G}}_{III}$           | mit den Rissöffnungsmoden I, II und III assoziierte<br>anteilige inkrementelle Energiefreisetzungsrate |
| $\mathcal{G}_c$  | Bruchzähigkeit   |
| $h$  | Laminatdicke   |
| $H_{\alpha\beta}$  | Energiefreisetzungsrate-Verteilungen bei Spitzkerben   |
| $\tilde{H}_{\alpha\beta}$  | normierte Energiefreisetzungsrate-Verteilungen bei Spitzkerben   |
| $\mathbf{J}$   | Jacobimatrix   |
| $K$  | Kinetische Energie   |
| $\mathbf{K}$   | Systemsteifigkeitsmatrix   |
| $K_I, K_{II}, K_{III}$   | Spannungsintensitätsfaktoren für die Moden I, II und III   |
| $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$  | Bruchzähigkeiten für reine Moden I, II und III   |
| $\mathbf{K}_e$   | Elementsteifigkeitsmatrix  |
| $l$  | Länge  |
| $L$  | charakteristische Länge  |
| $m_b$  | Beanspruchungsparameter für Biegeproben  |
| $m_z$  | Beanspruchungsparameter für modifizierte Zugproben   |
| $M_x, M_y, M_{xy}$   | Schnittmomente   |
| $M_x^H, M_y^H, M_{xy}^H$   | hygrische Schnittmomente   |
| $M_x^T, M_y^T, M_{xy}^T$   | thermische Schnittmomente  |
| $n_e$  | Anzahl der Elemente  |
| $n_j$  | Komponenten des Normalenvektors  |
| $n_{ke}$   | Knotenanzahl pro Element   |
| $N$  | Anzahl der Rissflankenknotenpaare  |
| $N_i(\xi, \eta)$   | Formfunktion   |
| $N_i^G(\xi, \eta)$   | Geometrie-Formfunktion   |
| $N_i^V(\xi, \eta)$   | Verschiebungs-Formfunktion   |



|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $N_{xf}$                      | Bruchlast   |
| $N_x, N_y, N_{xy}$            | Schnittkräfte   |
| $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H$      | hygrische Schnittkräfte   |
| $N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T$      | thermische Schnittkräfte  |
| $\mathbf{p}$                  | Systemknotenpunktlasten   |
| $\mathbf{p}_e$                | Elementknotenpunktlasten  |
| $p_i$                         | Komponenten des Schnittkraftvektors                               |
| $\tilde{\mathbf{p}}_k^{(1)-}$ | Knotenschnittkräfte im Zustand ohne Riss am negativen Schnittufer |
| $p_x, p_y, p$                 | äußere Laminatlasten  |
| $P$                           | Last, mechanische Leistung  |
| $P_{cn}$                      | Bruchlast in der $n$ -ten Iteration                               |
| $P_{el}$                      | elektrische Leistung  |
| $P_f$                         | Leistung der Volumenkräfte, Bruchlast                             |
| $P_t$                         | Leistung der Randlasten   |
| $Q$                           | nichtmechanischer Energietransport                                |
| $Q_{ij}$                      | reduzierte Steifigkeiten im Materialhauptachsensystem             |
| $\bar{Q}_{ij}$                | reduzierte Steifigkeiten im Laminat-Koordinatensystem             |
| $r, \varphi, z$               | Zylinderkoordinaten   |
| $\tilde{r}$                   | normierte Radialkoordinate  |
| $R$                           | Radius  |
| $R_{\parallel}^+$             | longitudinale Zugfestigkeit                                       |
| $R_{\parallel}^-$             | longitudinale Druckfestigkeit                                     |
| $R_{\perp}^+$                 | transversale Zugfestigkeit  |
| $R_{\perp}^-$                 | transversale Druckfestigkeit                                      |
| $R_{\perp\parallel}$          | Scherfestigkeit   |
| $s$                           | Element-Randkoordinate  |
| $s_{ij}$                      | Komponenten des Deviators des Cauchyschen Spannungstensors        |
| $s_{ijkl}$                    | Komponenten des Nachgiebigkeitstensors                            |
| $\mathbf{t}^*$                | Spannungsvektor am Rand   |
| $t_i$                         | Komponenten des Spannungsvektors                                  |
| $t_i^*$                       | Komponenten des Spannungsvektors am Rand                          |
| $T$                           | Temperatur  |
| $T_0$                         | Ausgangstemperatur  |
| $u$                           | Verschiebung in $x$ -Richtung                                     |
| $\mathbf{u}$                  | Verschiebungsvektor   |
| $u^0$                         | Verschiebung der Laminat-Mittelebene in $x$ -Richtung             |
| $u^{(2)+}, u^{(2)-}$          | Verschiebungen $u$ der positiven und negativen Rissflanken        |
| $u_i$                         | Komponenten des Verschiebungsvektors                              |
| $u_i^*$                       | Komponenten des vorgegebenen Randverschiebungsvektors             |

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| $u_{\alpha 0}$                    | Starrkörperverschiebungen  |
| $\hat{u}_{\alpha}^{(n)}(\varphi)$ | Verschiebungsfeld-Umfangsverteilungen bei Rissen                 |
| $u_{ik}^{(2)+}, u_{ik}^{(2)-}$    | Knotenverschiebungen der positiven<br>bzw. negativen Rissflanken |
| $\delta u_i$                      | virtuelle Verrückungen   |
| $U$                               | Formänderungsenergiedichte                                       |
| $U_G$                             | Gestaltänderungsenergiedichte                                    |
| $U_V$                             | Volumenänderungsenergiedichte                                    |
| $v$                               | Verschiebung in $y$ -Richtung                                    |
| $v^0$                             | Verschiebung der Laminat-Mittelebene in $y$ -Richtung            |
| $v^{(2)+}, v^{(2)-}$              | Verschiebungen $v$ der positiven und negativen Rissflanken       |
| $\mathbf{v}$                      | Systemknotenverschiebungen                                       |
| $\mathbf{v}_e$                    | Elementknotenverschiebungen                                      |
| $\mathbf{v}_e$                    | Knotenverschiebungen   |
| $V$                               | Volumen  |
| $\partial V$                      | Rand eines Gebiets   |
| $\partial V_t$                    | Randteil mit formulierten dynamischen Randbedingungen            |
| $\partial V_u$                    | Randteil mit formulierten kinematischen Randbedingungen          |
| $w$                               | Verschiebung in $z$ -Richtung                                    |
| $w^0$                             | Verschiebung der Laminat-Mittelebene in $z$ -Richtung            |
| $w^{(2)+}, w^{(2)-}$              | Verschiebungen $w$ der positiven und negativen Rissflanken       |
| $\hat{w}^{(n)}(\varphi)$          | Verschiebungsfeld-Umfangsverteilungen bei Rissen                 |
| $w_0$                             | Starrkörperverschiebungen  |
| $W$                               | Formänderungsarbeit  |
| $W_f$                             | Arbeit der Volumenkräfte   |
| $W_t$                             | Arbeit der Randlasten  |
| $W_Q$                             | nichtmechanische Arbeit  |
| $\delta W^a$                      | äußere virtuelle Arbeit  |
| $\delta W^i$                      | innere virtuelle Arbeit  |
| $x, y, z$                         | kartesische Koordinaten  |
| $\mathbf{x}$                      | Ortsvektor   |
| $x_i$                             | Komponenten des Ortsvektors                                      |
| $x_P, x_{S1}, x_{S2}$             | Längenbezeichnungen  |
| $Y\left(\frac{R+a}{R}\right)$     | tabellierte Funktion   |
| $z$                               | komplexe Variable  |

## Griechische Buchstaben

|  |  |
|--|--|
| $\alpha_T, \alpha_{ij}$  | Temperaturausdehnungskoeffizienten   |
| $\beta_{ij}$   | Feuchtigkeitsausdehnungskoeffizienten  |
| $\gamma_{ij}$  | technische Gleitungen  |
| $\Gamma$   | am Bruchprozess beteiligte Energieformen   |
| $\delta_{ij}$  | Komponenten des Einheitstensors  |
| $\tilde{\epsilon}$   | im Element approximierte Verzerrungen  |
| $\epsilon_c$   | kritische Dehnung  |
| $\epsilon_{ij}$  | Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors  |
| $\epsilon_{ij}^H$  | hygrische Dehnungen  |
| $\epsilon_{ij}^T$  | thermische Dehnungen   |
| $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$                            | Verzerrungen der Laminat-Mittelebene   |
| $\epsilon_A$   | Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors<br>in Voigt-Notation                           |
| $\delta\epsilon_{ij}$  | virtuelle Verzerrungen   |
| $\eta_{el}$  | elektrischer Wirkungsgrad  |
| $\vartheta$  | Lagenwinkel einer Laminat-Einzelschicht  |
| $\theta_F$   | Benetzungswinkel der Fügung  |
| $\kappa$   | Materialkonstante  |
| $\kappa_{ij}$  | Verkrümmungen  |
| $\lambda$  | Lamésche Konstante   |
| $\lambda_i$  | Feldexponenten   |
| $\mu$  | Lamésche Konstante   |
| $\nu, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13},$<br>$\nu_{31}, \nu_{12}, \nu_{21}$ | Querkontraktionszahlen   |
| $\xi, \eta$  | lokale Elementkoordinaten  |
| $\Pi$  | Potential  |
| $\Pi^a$  | äußeres Potential  |
| $\Pi^i$  | inneres Potential  |
| $\Delta\Pi_I, \Delta\Pi_{II}, \Delta\Pi_{III}$                         | Mit den Rissöffnungsmoden I, II und III<br>assoziierte anteilige Änderungen des Gesamtpotentials |
| $\rho$   | Dichte   |
| $\tilde{\sigma}$   | im Element approximierte Spannungen  |
| $\sigma_I$   | maximale Hauptnormalspannung   |
| $\sigma_c$   | kritische Spannung   |
| $\sigma_{ij}$  | Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors   |
| $\sigma_{max}$   | maximale Biegenormalspannung   |
| $\sigma_t$   | Zugspannung  |
| $\sigma_{tf}$  | Zugspannung im Versagensfall   |

---

|   |   |
|---|---|
| $\sigma_A$                                  | Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors<br>in Voigt-Notation |
| $\sigma_\varphi^{as}$                       | Spannungen gemäß asymptotischer Lösung                            |
| $\sigma_\varphi^{num}$                      | Spannungen gemäß numerischer Lösung                               |
| $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(n)}(\varphi)$ | Spannungsfeld-Umfangsverteilungen bei Rissen                      |
| $\bar{\tau}$                                | mittlere Schubspannung infolge Querkraft                          |
| $\tau_c$                                    | kritische Schubspannung   |
| $\hat{\tau}_{\alpha\beta}^{(n)}(\varphi)$   | Spannungsfeld-Umfangsverteilungen bei Rissen                      |
| $\varphi_{cn}$                              | Orientierung des gebildeten Risses in der $n$ -ten Iteration      |
| $\varphi_f$                                 | Orientierung des gebildeten Risses                                |
| $\Phi(z)$                                   | holomorphe komplexe Funktion                                      |
| $\Phi \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \right]$     | Funktional der Spannungen im Zustand ohne Riss                    |
| $\chi(z)$                                   | holomorphe komplexe Funktion                                      |
| $\psi$                                      | Winkel  |
| $\Psi(z)$                                   | holomorphe komplexe Funktion                                      |
| $\omega$                                    | Winkel  |
| $\Omega$                                    | Gebiet  |
| $\Omega(z)$                                 | holomorphe komplexe Funktion                                      |
| $\Omega_e$                                  | Gebiet eines Elements   |
| $\Omega_v$                                  | virtuelle Bruchfläche   |
| $\partial\Omega_e$                          | Rand eines Elements   |



# Kurzfassung

Die Entwicklung hochbeanspruchter Strukturen erfordert leistungsfähige Bewertungskonzepte für konstruktiv oft unvermeidbare Spannungskonzentrationen als potentielle Ausgangspunkte für Rissbildung und anschließendes Versagen. Während klassische Versagenshypothesen zur Bewertung schwach inhomogener Spannungsfelder und klassische bruchmechanische Konzepte zur Bewertung hinreichend großer Risse gut geeignet sind, bieten sie jedoch keinen adäquaten Zugang zu theoretisch singulären Spannungskonzentrationen ohne Riss sowie zu diversen Skalierungsphänomenen der effektiven Festigkeit. Durch Kombination klassischer Versagenshypothesen mit einem energetischen Bruchkriterium im Rahmen der Konzeptes der Bruchmechanik finiter Risse ermöglicht ein unlängst vorgeschlagenes hybrides Versagensmodell einen allgemeineren Zugang zur spröden Rissbildung. Dadurch, dass sowohl die Anordnung ohne Riss als auch potentielle Risskonfigurationen untersucht werden müssen, wird die Auswertung analytisch anspruchsvoll und numerisch aufwendig. Bisher wurden nur für sehr spezielle Konfigurationen analytische und numerische Zugänge entwickelt.

Im Rahmen dieser Arbeit hingegen wird ein sehr allgemeiner direkter numerischer Zugang bereitgestellt. Die ebene und quasi-räumliche Diskretisierung mit finiten Elementen für gerade, von einem Punkt ausgehende Risse ermöglicht die Auswertung des hybriden Versagensmodells am untersuchten Punkt für nahezu beliebige Beanspruchungen. Mittels einer Optimierungsprozedur wird die Bruchlast als Lösung eines nichtlinearen Optimierungsproblems bestimmt. Durch Vergleich mit der neuen direkten numerischen Formulierung konnten anhand von Kerbproblemen bekannte und neu entwickelte, auf asymptotischen Entwicklungen basierende Lösungen validiert werden. In vielen Fällen bieten sie eine numerisch effiziente Alternative. Auch der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen an Proben aus PMMA zeigte gute Übereinstimmung. Für das Problem der Bewertung von Randeffekten in CFK-Laminaten wird mit der neuen Formulierung ein leistungsfähiger Zugang bereitgestellt, wobei der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen gute Übereinstimmung zeigte. Weiterhin wurde das Modell zur Bewertung von Fügungen in Hochtemperatur-Brennstoffzellenstacks angewendet. Auch für diese realistische Bauteilsituation hat sich das neue Verfahren als ein sehr leistungsfähiges Werkzeug erwiesen, mit dem wesentliches Optimierungspotential aufgezeigt werden konnte.



# Abstract

The development of highly strained structures requires powerful assessment concepts for structurally inevitable stress concentrations being potential locations for crack formation succeeded by failure. While classical failure criteria are well suited for the assessment of weakly inhomogeneous stress fields and classical fracture mechanics approaches provide means for the treatment of sufficiently large existing cracks, theoretically singular stress concentrations without cracks as well as certain scaling phenomena of the effective strength are not described by the mentioned approaches. By combination of a classical failure hypothesis with an energetic fracture criterion, a recently proposed hybrid failure model provides a more general approach to brittle crack formation. As the perfect configuration as well as potential crack configurations need to be investigated, the evaluation is analytically demanding and numerically expensive. Existing analytical and numerical approaches only cover special configurations.

This work provides a more general direct numerical approach. Plane and quasi-three-dimensional finite-element-discretisations of straight cracks emanating from the investigated point enable the evaluation of the model for almost arbitrary loading. The failure load is calculated by means of solution of the corresponding non-linear optimisation problem with an appropriate procedure. Existing and newly developed asymptotic solutions for notch problems have been validated by means of comparison with the new direct numerical formulation. In many cases, they provide a numerically efficient alternative. Comparison with experimental results for PMMA also showed good agreement. For the problem of the assessment of free-edge effects in CFRP-laminates, the new formulation provides an efficient approach exhibiting good agreement with experiments. Furthermore, the model has been applied to ceramic sealing joints in solid oxide fuel cell stacks. Even for this engineering application, the method has shown to be a very powerful tool revealing significant optimisation potential.





# Einleitung

Bruchvorgänge stehen im Fokus vieler wissenschaftlicher Untersuchungen auf dem Gebiet der Festkörper- und Strukturmechanik. Vornehmlich zur Vermeidung von Schadensfällen<sup>1</sup> wie dem Einsturz von Bauwerken, der Explosion von Dampfkesseln oder Brüchen an Verkehrsmitteln mit oft spektakulären Folgen, aber auch zur Verbesserung von Fertigungsverfahren, wird die Beherrschung von Bruchvorgängen angestrebt, die dem Anwender auch einen wirtschaftlichen Nutzen bringt.

Schon bei den Völkern des Altertums müssen empirische Regeln zur Dimensionierung tragender Bauteile vorgelegen haben. Von Leonardo da Vinci<sup>2</sup> (1452-1519) sind erste Aufzeichnungen zum Bruch von Stäben und Balken überliefert. Weitergehende systematische wissenschaftliche Betrachtungen findet man in den Werken Galileo Galileis<sup>3</sup> (1564-1642). Die moderne Bruchmechanik<sup>4</sup> beginnt jedoch erst im 20. Jahrhundert, verbunden mit den Anforderungen neuer Technologien und Produkte wie z. B. geschweißte Schiffsrümpfe, Flugzeugrümpfe aus Aluminium sowie kern- und verfahrenstechnische Anlagen.

Bei der Bildung und Ausbreitung von Rissen wird im Wesentlichen zwischen zwei Brucharten unterschieden, dem Spröbruch und dem duktilen Bruch. Der letztere ist von großen inelastischen Deformationsvorgängen begleitet und die relevanten mikroskopischen Versagensmechanismen sind Hohlraumbildung und -vereinigung. Bei dem in dieser Arbeit behandelten Spröbruch hingegen sind die plastischen Deformationen auf die unmittelbare Umgebung der Bruchoberfläche beschränkt. Relevante mikroskopische Bruchmechanismen sind Spaltbruch oder eingeschränktes plastisches Fließen mit Hohlraumbildung. Die Bildung von Rissen geschieht oft an Spannungskonzentrationen, die auch selbst Risse sein können. Sie resultieren aus der Geometrie des Körpers, z. B. aus Kerben und Rissen, aus Materialübergängen an Fügungen oder Laminaträndern und auch aus Kombinationen davon. Dies gilt auch für die in Bild 1 gezeigten Beispiele. Auf der Bruchfläche des geborstenen Turbinenläufers ist der Defekt im Zentrum, von dem der Bruch ausging, gut zu erkennen. Beim Bruchtrennen von Pleuelstangen werden Kerben ins Bauteil eingebracht, von welchen dann der Bruch wie gewünscht ausgeht.

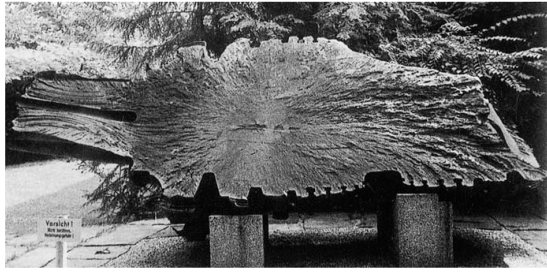
---

<sup>1</sup>Vgl. z. B. Lancaster [117].

<sup>2</sup> Vgl. z. B. Timoshenko [231], S. 2 ff.

<sup>3</sup> Vgl. z. B. a. a. O., S. 7 ff.

<sup>4</sup>Vgl. z. B. Anderson [5], S. 6 ff. oder Kanninen und Popelar [98], S. 30 ff.

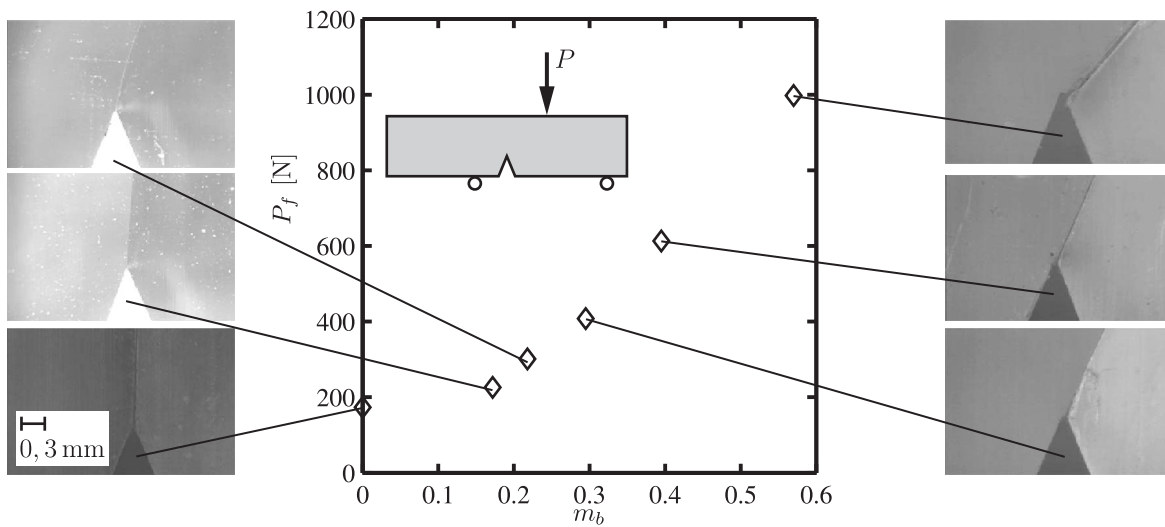


(a)



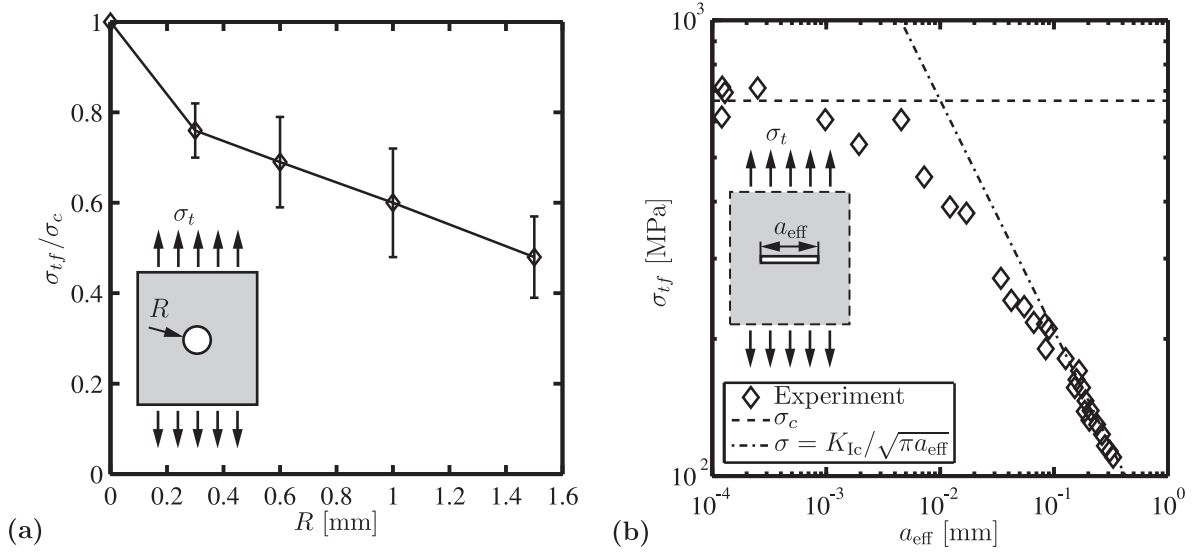
(b)

**Bild 1:** Beispiele für Sprödbbruch: Geborstener Turbinenläufer (Schmitt-Thomas [209], S. 105) (a), durch Bruchtrennen geteilte Pleuelstange (Kenzel [100]) (b).



**Bild 2:** Rissbildung an Spitzkerben in Proben aus PMMA: Abhängigkeit der Bruchlast und des Rissbildungswinkels von der Belastung (symmetrisch für  $m_b = 0$ , Yosibash [250, 251]).

Zur Bewertung von Spannungszuständen existieren einerseits klassische spannungs- oder dehnungsbasierte Versagenskriterien, die sich jedoch nur für schwach inhomogene Felder eignen. Zur Bewertung von Rissen kann auf die Konzepte der klassischen Bruchmechanik zurückgegriffen werden. Erklärungslücken bestehen jedoch an Stellen mit theoretisch singulären Spannungen im Sinne der Elastizitätstheorie, die keine Rissspitzen sind. Dazu gehören auch die in Bild 2 dargestellten experimentellen Ergebnisse an Dreipunkt-Biegeproben aus PMMA mit Spitzkerben, an denen sich im Versagensfall vom Kerbgrund ausgehende Risse bilden. Hier liefern klassische Versagenskriterien keine Aussage und bruchmechanische Konzepte sind in Ermangelung eines Risses im ungeschädigten Zustand auch nicht anwendbar. Weiterhin werden kurze Risse oder kleine Löcher durch die klassischen Zugänge nicht ausreichend beschrieben. Für kleine Abmessungen der Fehler treten Größeneffekte auf, bei denen die effektive Festigkeit anders mit der Fehlergröße skaliert



**Bild 3:** Rissbildung an Proben aus PMMA mit Kreisloch unter Zug, Abhängigkeit der Bruchlast von der Lochgröße (Li und Zhang [137]) (a), Versagen von Proben aus SiC mit eingebrachten Rissen unter Zug, Abhängigkeit der Bruchspannung von der effektiven Risslänge (Kimoto et al. [104]) (b).

als durch die Theorien beschrieben wird. Dies wird an den in Bild 3a dargestellten Ergebnissen deutlich. Für Proben aus PMMA mit Kreislöchern unter Zugbelastung wird das unter Verwendung des für diesen Fall bekannten Spannungskonzentrationsfaktors von drei<sup>5</sup> gemäß klassischer Versagenskriterien unabhängig von der Lochgröße erwartete Ergebnis von  $\sigma_{tf}/\sigma_c = 1/3$  nur annähernd für hinreichend große Lochradien erreicht. Mit kleiner werdendem Lochradius steigt die Versagenslast bis zum Wert von  $\sigma_{tf}/\sigma_c = 1$  für die Probe ohne Loch an. Für dieses Problem werden also nur die Grenzfälle durch klassische Zugänge beschrieben. Dies gilt auch für die in Bild 3b dargestellten Ergebnisse für die Bruchlast von Rissen in Proben aus einer SiC-Keramik unter Zug, wobei Ergebnisse aus Versuchen mit verschiedenen Probengeometrien auf die dargestellte Konfiguration des Griffith-Risses mit effektiver Risslänge  $a_{eff}$  umgerechnet wurden. Für hinreichend große Risslängen wird die effektive Festigkeit durch das klassische  $K$ -Konzept der linearen Bruchmechanik beschrieben. Bei kleineren Risslängen wird die effektive Festigkeit jedoch durch das bruchmechanische Kriterium überschätzt. Die Bruchlasten konvergieren mit der üblichen experimentellen Streuung für kleiner werdende Risslängen gegen die obere Grenze der Festigkeit  $\sigma_c$ .

Mögliche Zugänge zu diesen durch klassische Theorien nicht beschriebenen Effekten sind nichtlokale Versagenskriterien, geometrieabhängige Bruchparameter, Kohäsivzonenmodelle oder kontinuums-schädigungsmechanische Modellierungen, nur um einige zu nennen. Oft sind diese jedoch nur auf spezielle Konfigurationen anwendbar oder erfordern zusätzliche, nur mit hohem experimentellen Aufwand bestimmbare Materialparameter.

<sup>5</sup>Vgl. z. B. Pilkey und Pilkey [184].

Unlängst wurde von Leguillon [124, 125] ein hybrides Versagensmodell vorgeschlagen, welches durch Kombination eines energetischen Bruchkriteriums und eines spannungs-basierten Versagenskriteriums unter Verwendung weniger fundamentaler Materialparameter Aussagen über spröde Rissbildung an beliebigen Spannungskonzentrationen ermöglicht. Im Sinne der „Bruchmechanik finiter Risse“<sup>6</sup> wird die Bildung von Rissen endlicher Größe postuliert, sobald auf der virtuellen Bruchfläche ein spannungsbasiertes Versagenskriterium erfüllt und bei der Bildung der Risse die Energiebilanz gewährleistet ist. Die Auswertung erfordert sowohl die Analyse der Konfiguration ohne Riss als auch potentieller Risskonfigurationen, was die analytische Auswertung erschwert und den numerischen Aufwand erhöht.

## Stand der Forschung

Aufgrund der großen praktischen Bedeutung wurden zur Versagensbewertung von Spannungskonzentrationen schon vielfältige Ansätze vorgeschlagen. Nachfolgend werden einige Zugänge für homogene Kerben sowie für materielle Diskontinuitäten vorgestellt. Anschließend wird in die Bruchmechanik finiter Risse eingeführt.

### Bewertung homogener Kerben

Zur Bewertung regulärer Spannungskonzentrationen an Kerben in homogenen Konfigurationen werden in der ingenieurmäßigen Bewertungspraxis oft Kerbgrundkonzepte eingesetzt, vgl. Mertens [151] sowie Pilkey und Pilkey [184], bei denen die lokal vorliegenden Spannungen bewertet werden. Für singuläre Spannungskonzentrationen sind jedoch andere Zugänge erforderlich. Ein möglicher Zugang ist eine nichtlokale Auswertung des Spannungsfeldes. Die einfachste Möglichkeit ist eine punktweise Auswertung einer Vergleichsspannung in einem bestimmten Abstand von der Spannungskonzentration, wie von Peterson [182] vorgeschlagen. Whitney und Nuismer [244] wendeten den Ansatz auf Laminat an und Grenestedt et al. [66] auf PVC-Schäume. McClintock [149] schlug eine punktweise Auswertung der Dehnungen vor. Eine über eine charakteristische Länge gemittelte Auswertung der Spannungen wurde im Zusammenhang mit einer elastizitätstheoretischen Lösung des Spannungsfeldes an Spitzkerben und Rissen schon 1907 von Wieghardt [245] vorgeschlagen. Das Kriterium wurde von Neuber [174] unter dem Namen Mikrostützwirkung publiziert und auch von Whitney und Nuismer [244] für Kreislöcher in Laminaten verwendet. In den genannten Ansätzen bleibt die charakteristische Länge ein noch zu bestimmender Parameter. Novozhilov [176] bestimmte diese über bruchmechanische Betrachtungen, ebenso Seweryn und Mróz [213] sowie Seweryn et al. [214], die das Kriterium an Proben mit Spitzkerben unter gemischter Beanspruchung validierten. Ritchie et al. [205] verwendeten das Konzept für Risse in Verbindung mit klassischer Bruchmechanik.

---

<sup>6</sup>Engl. „finite fracture mechanics“, vgl. Hashin [77] sowie Taylor et al. [229].

Ayatollahi und Torabi [10] stellten eine Formulierung für U-Kerben unter gemischter Beanspruchung vor. Taylor [226–228] prägte für das Konzept den Namen „Theorie kritischer Distanzen“<sup>7</sup>.

Auch andere Feldgrößen werden zur Bewertung herangezogen. Sih [216–218] schlug, zunächst für Rissprobleme eine Betrachtung der Intensität des Formänderungsenergiedichtefeldes vor, die Seweryn und Łukaszewicz [212] in nichtlokaler Form auf V-Kerben übertrugen. Lazzarin und Zambardi [120] sowie Yosibash et al. [249] schlugen eine über ein Kontrollvolumen gemittelte Auswertung vor, die von Gómez et al. [60] an Proben mit U-Kerben validiert wurde.

Analog zu den Spannungsintensitätsfaktoren für Risse lassen sich insbesondere für Spitzkerben auch Kerbspannungsintensitätsfaktoren formulieren, die als geometrieabhängiges Bruchkriterium verwendet werden können. Dunn et al. [47, 48] verwendeten Kerbspannungsintensitätsfaktoren für V-Kerben in isotropem Material, die auf der analytischen Lösung von Williams [247] basieren. Suwito et al. [224, 225] verwendeten Kerbspannungsintensitätsfaktoren für V-Kerben in anisotropem Material. Dabei kann z. B. auf die analytischen Lösungen von Bogy [20] sowie von Kuo und Bogy [113] zurückgegriffen werden. Kullmer und Richard [111] verwendeten zur Bewertung sowohl von stumpfen Kerben als auch von scharfen Rissen in isotropem Material verallgemeinerte Intensitätsfaktoren, die mit einem effektiven kritischen Wert verglichen werden. Einen ähnlichen Ansatz verfolgten Gómez et al. [61] für stumpfe V-Kerben in isotropem Material unter Verwendung der Lösung von Lazzarin und Tovo [119].

Bruchmechanisch motiviert ist die Betrachtung virtueller, von der Spannungskonzentration ausgehender Risse und deren Bewertung. So schlugen Palaniswamy und Knauss [180] für Risse sowie Waddoups et al. [241] für Kreislöcher die Auswertung von Spannungsintensitätsfaktor oder Energiefreisetzungsrate an der virtuellen Risspitze vor. Hussain et al. [95] betrachteten auch virtuelle, von der Anfangsrisspitze ausgehende Risse, bewerteten diese jedoch über eine inkrementelle Energiefreisetzungsrate. Zur Analyse von Spitzkerben wurden von Seweryn und Łukaszewicz [212] entsprechende Modifikationen beider Kriterien vorgeschlagen. Eine weitere Möglichkeit ist die Annahme und Betrachtung kleiner Anfangsrisse an der Kerbe. So studierten Leblond und Mouro [121, 122] Risse, die von einem kleinen Anfangsriss im Kerbgrund ausgehen.

Mit einer geeigneten Kohäsivzonenmodellierung können auftretende Singularitäten umgangen und Größeneffekte beschrieben werden. Fett [52] wendete diese auf V-Kerben an, Gómez und Elices [58, 59] auch auf U-Kerben. Auch kontinuums-schädigungsmechanische Zugänge wurden auf Spannungskonzentrationsprobleme angewendet. Clarin [34] analysierte V-Kerben mit dem Schädigungszonenmodell von Hillerborg et al. [92]. Für allgemeinere Betrachtungen und Zugänge zum Thema Größeneffekte sei noch auf die Monographie von Bažant und Planas [12] sowie auf den Tagungsband von Carpinteri [26] hingewiesen.

---

<sup>7</sup>Engl. „theory of critical distances“.

Bezüglich experimenteller Vergleiche verschiedener Kriterien sei für V-Kerben auf die Publikationen von Seweryn und Łukaszewicz [212], Yosibash et al. [250], Priel et al. [187] sowie von Chen und Ozaki [31] verwiesen. Als reguläre Spannungskonzentrationen wurden von Gómez et al. [62] U-Kerben und von Li und Zhang [137] Zugproben mit Kreisloch untersucht.

## Bewertung materieller Diskontinuitäten

Auch an materiellen Diskontinuitäten treten Spannungskonzentrationen, zum Teil mit in der Theorie oszillierenden und logarithmischen Singularitäten, auf, die einer Bewertung bedürfen. Oft wird die Situation durch zusätzliche Kerben noch verschärft. Einen ersten analytischen Zugang bieten eindimensionale Modelle für Klebverbindungen, z. B. von Volkersen [240], Goland und Reissner [57] oder Hart-Smith [73, 74]. Obwohl mit diesen Modellen keine Singularitäten abgebildet werden, können an ihnen wesentliche Effekte studiert werden. In Kombination mit empirischen Daten bilden sie auch die Grundlage heuristischer Auslegungsmodelle.

Die zweidimensionale Modellierung von Mehrmaterialkerben erfasst wesentliche Effekte. Wichtige analytische Zugänge liefern die Arbeiten von Bogy [17–19]. Dundurs [46] schlug eine vorteilhafte Darstellung der Materialparameter bei isotropen Bimaterialkerbproblemen vor. Dempsey und Sinclair [43, 44] untersuchten eingehend das singuläre Verhalten an Bimaterialkerben, insbesondere die auftretenden oszillierenden und logarithmischen Singularitäten. Munz und Yang [166, 167] untersuchten die Beschreibung des asymptotischen Feldes durch Kerbspannungsintensitätsfaktoren, deren Extraktion bei Bimaterialproblemen aufgrund der komplexen Felder gegenüber homogenen Problemen deutlich erschwert ist. Theocaris [230] und auch Müller et al. [162, 163] untersuchten die Material- und Geometrieabhängigkeit des Spannungsfeldes an Bimaterialkerben mit der komplexen Methode.

Zur Charakterisierung der singulären Felder bietet sich auch hier die Bewertung mit Kerbspannungsintensitätsfaktoren an, die auf asymptotischen Analysen beruhen. Gradin [63], Reedy und Guess [200, 201], Quian und Akisanya [194, 195], Akisanya und Meng [3], Gleich et al. [56] sowie Labossiere et al. [115] zeigten in ebener Formulierung die Anwendung auf Fügungen. Labossiere und Dunn [114] erweiterten das Konzept auf räumliche Probleme. Ein entscheidender Nachteil der Verwendung von Kerbspannungsintensitätsfaktoren als Bruchkriterium ist deren Definition, die nur für die jeweilige Konfiguration gültig ist. Diesen Mangel an Übertragbarkeit versuchten van Tooren und Krakkers [233] sowie Hattori [78] durch Beschreibung eines Zusammenhangs zwischen Singularitätsexponent und kritischem Kerbspannungsintensitätsfaktor zu beheben.

Auch die nichtlokale Auswertung von Feldgrößen wurde zur Bewertung vorgeschlagen. Clark und McGregor [35] schlugen eine nichtlokale Auswertung einer Vergleichsspannung, Sheppard et al. [215] eine nichtlokale Auswertung einer Vergleichsdehnung über einen Be-



reich einer Fügung vor, dessen Größe per Rückrechnung aus Experimenten bestimmt wird. Einen ähnlichen Zugang verfolgten Kim und Soni [102] zur Bewertung von Delaminationen an freien Laminaträndern über interlaminare Spannungskomponenten. Hier erfolgt die Mittelung üblicherweise über die Länge einer Einzelschichtdicke ins Laminat hinein. Lagunegrand et al. [116] sowie Ramtekkar und Desai [198] verwendeten eine Vergleichsspannungsformulierung. Weiterhin wurde auch die Auswertung der Verzerrungsenergiedichte vorgeschlagen. Tong [232] schlug für ein eindimensionales Modell ohne Singularitäten die lokale Auswertung vor. Fan et al. [51] verwendeten bei räumlichen Problemen eine entsprechende Mittelung.

Die Möglichkeit der Annahme und Bewertung kleiner Risse wurde auch für inhomogene Konfigurationen aufgezeigt. Iancu et al. [96], Pradhan et al. [186] sowie Grenestedt und Hallstrom [65] studierten kleine Risse in Fügungen. Zur Bewertung der Delaminationskritikalität an freien Laminaträndern bewerteten Lindemann und Becker [139] kleine virtuelle Risse. Leguillon [123, 127] verwendete zur Bewertung des Problems ein inkrementelles energetisches Bruchkriterium, für das er eine asymptotische Formulierung entwickelte.

Kohäsivzonenmodelle bieten eine weitere Möglichkeit der Modellierung der Rissbildung an materiellen Diskontinuitäten. Beispiele finden sich in Mohammed und Liechti [156], Campilho et al. [25], de Moura und Chousal [157] sowie in Freed und Bank-Sills [54]. Von de Moura und Chousal [157] wurde außerdem ein kontinuums-schädigungsmechanischer Ansatz gezeigt. Einen Vergleich verschiedener Versagenskriterien für Fügungen anhand von Experimenten findet man bei Crocombe und Richardson [38].

## Bruchmechanik finiter Risse

Neben der Versagenslast ist die Versagensart, die aus der ungeschädigten Konfiguration entstehende geschädigte Konfiguration, eine wichtige Fragestellung. Für die ungeschädigte Konfiguration ohne Anfangsriss können gewöhnliche bruchmechanische Methoden nicht angewendet werden. Für die Schädigung, die in der Regel durch Rissbildung erfolgt, ist ein Modell erforderlich. Nicht aus allen oben angeführten Versagensmodellen lässt sich die Versagensart ableiten. Die Bewertung mit Kerbspannungsintensitätsfaktoren oder die gemittelte Auswertung der Formänderungsenergiedichte liefern beispielsweise keine Auskunft über die Anfangsrissbildung, welche jedoch wichtig für weitere Betrachtungen ist.

Schon Novozhilov [176] sprach 1969 vom Bruch als einem „diskreten Prozess“, der in „Bruchquanten“ auf atomarer Ebene ablaufe. Hashin [77] prägte den Begriff „Bruchmechanik finiter Risse“ für ein Modell der Mikrorissbildung in Laminaten. Hierbei wird die spontane Bildung von Rissen endlicher Länge postuliert, sobald die Energiebilanz erfüllt ist. Taylor et al. [229] verallgemeinerten den Begriff auf Kerb- und Rissprobleme im Zusammenhang mit einem Modell mit energetischem Kriterium und konstanter, auf bruchmechanischen Überlegungen beruhender, Risslänge. Einen ähnlichen Zugang findet man bei Seweryn und Mróz [213]. Auch Pugno und Ruoff [193] sprachen bei einem derartigen



Modell von „Bruchquanten“. Von Pugno et al. [191] wurde es auf Ermüdung und von Pugno [192] auf dynamische Probleme erweitert.

Weitere Anwendungen für die Bruchmechanik finiter Risse im Sinne des energetischen Kriteriums von Hashin sind Einzelfaserrisse<sup>8</sup>, Matrixrisse<sup>9</sup> und Dünnschichtversagen<sup>10</sup>. Auch das schon erwähnte Modell von Leguillon [123, 127] für Delaminationen an freien Laminaträndern sei hier genannt. Francfort und Marigo [53] sowie Bourdin et al. [22] fassen Sprödbbruch im Allgemeinen als energetisch motiviertes Variationsproblem über alle zulässigen Risskonfigurationen und Verschiebungsfelder auf. Kuhn und Müller [109, 110] sowie Müller und Kuhn [165] haben das Modell als Phasenfeldmodell umgesetzt.

Das hybride Versagensmodell nach Leguillon [124, 125], welches in dieser Arbeit verwendet wird, beruht auf einer streng simultanen Betrachtung von Festigkeits- und Bruchzähigkeitskriterien. Versagen wird als die Bildung beliebiger kinematisch zulässiger Risse endlicher Größe im Sinne der Bruchmechanik finiter Risse verstanden. Notwendige und hinreichende Bedingungen sind dabei Vergleichsspannungen auf der virtuellen Bruchfläche, die größer oder gleich der Festigkeit sind sowie eine inkrementelle Energiefreisetzungsrate für den neu gebildeten Riss, die größer oder gleich der Bruchzähigkeit ist. Die Formulierung schließt die gut verstandenen Extremfälle homogener Spannungsfelder und existierender Risse sowie alle anderen Spannungskonzentrationen mit ein. Vorteilhaft sind insbesondere die Verwendung von nur zwei grundlegenden Materialparametern, Festigkeit und Bruchzähigkeit, sowie die Vorhersage sowohl von der Versagenslast als auch der Versagensart. Eine ähnliche Formulierung für Matrixrisse in Laminaten schlugen Abe et al. [1] vor. Cornetti et al. [36] modifizierten das Festigkeits-Teilkriterium des Modells auf ein integrales Gleichheits-Spannungskriterium. Untermauert durch experimentelle Ergebnisse demonstrierten sie durch Anwendung auf relativ kleine homogene Proben die Überlegenheit des hybriden Kriteriums über rein spannungs- oder energiebasierte Kriterien mit konstanten Risslängen.

Analytische, auf asymptotischen Betrachtungen basierende Formulierungen wurden für verschiedene Konfigurationen publiziert. Obwohl sehr effizient, erfordert die Anwendung dieser Formulierungen die Dominanz der asymptotischen Felder in der betrachteten Situation, was zu erheblichen Einschränkungen bezüglich der betrachteten Struktur und des Lastfalls führen kann. Analysen scharfer und auch abgerundeter homogener Spitzkerben unter reiner und auch gemischter Beanspruchung wurden von Leguillon und Yosibash [133], Yosibash et al. [251], Priel et al. [188] sowie Carpinteri et al. [27] durchgeführt. Cornetti et al. [37] haben den Fall flacher V-Kerben behandelt, bei denen eine den diskutierten Größeneffekten bei Rissen<sup>11</sup> ähnliche Abhängigkeit von der Kerbtiefe vorliegt. Einen Vergleich mit einem Kohäsivzonenmodell diskutierten Henninger und Leguillon [89] sowie

---

<sup>8</sup>Vgl. Nairn und Liu [172].

<sup>9</sup>Vgl. Aveston und Kelly [9], Parvizi et al. [181], Wang und Crossman [242] sowie Nairn [171].

<sup>10</sup>Vgl. Andersons et al. [6] sowie Kim und Nairn [103].

<sup>11</sup>Vgl. Bild 3b.

Murer und Leguillon [169]. Der Einfluss der Streuung von Materialparametern wurde von Leguillon et al. [130] statistisch untersucht. Picard et al. [183] zeigten eine Erweiterung auf U-Kerben. Li und Zhang [137], Hebel und Becker [79, 81] sowie Leguillon et al. [132] untersuchten Scheiben mit Kreisloch unter Zug. Risse vor Poren wurden von Leguillon und Piat [131] behandelt. Die Anwendung auf gewöhnliche Rissprobleme liefert, wie von Leguillon und Murer [128] gezeigt, ein Kriterium zur Behandlung von Rissen unter gemischter Beanspruchung.

Auch materielle Diskontinuitäten wurden asymptotisch behandelt. Leguillon [125] sowie Leguillon et al. [126] untersuchten die Bildung von Grenzflächenrissen an Bimaterialkerben unter mechanischer Beanspruchung. Henninger und Leguillon [88] zeigten ein vereinfachtes Modell mit zusätzlicher thermischer Beanspruchung. Grenzflächenrissbildung an Einschlüssen wurde von Mantič [145] sowie von Quesada et al. [196] behandelt. Leguillon et al. [132] untersuchte auf Grenzflächen zulaufende Risse. Von Leguillon und Murer [129] wurde die Ablenkung von Grenzflächenrissen untersucht.

Neben den asymptotischen Formulierungen wurde das Modell auch numerisch ausgewertet. Verschiedene Probleme mit auf Grenzflächen zulaufenden Rissen wurden von Quesada et al. [197], Martin und Leguillon [146] sowie Martin et al. [148] behandelt. Die Bildung von Grenzflächenrissen an thermomechanisch beanspruchten Bimaterialkerben wurde von Müller et al. [159, 161] untersucht. Hebel et al. [84, 85] Carrere et al. [28] sowie Martin et al. [147] untersuchten die Delamination an freien Laminaträndern. Von Andersons et al. [7] wurde das Modell auf den Bruch von faserverstärkten Kompositen übertragen und auch numerisch ausgewertet.

## Ziele und Aufbau der Arbeit

Die bisherigen analytischen und numerischen Formulierungen des hybriden Versagensmodells von Leguillon sind nur auf spezielle Konfigurationen und Lastfälle beschränkt. Dies gilt insbesondere für die asymptotischen Modelle, bei denen die Dominanz der zugrundeliegenden Felder gewährleistet sein muss. Außerdem fehlt bislang eine Bewertung der Anwendungsgrenzen dieser Modelle. In dieser Arbeit wird eine universell anwendbare direkte numerische Formulierung des hybriden Versagensmodells zur Analyse von Multi-Material-Kerben in beliebig beanspruchten Strukturen bereitgestellt. Die zu untersuchende Struktur wird mit finiten Elementen in einem ebenen oder quasi-räumlichen Modell diskretisiert. Als mögliche Risskonfigurationen werden gerade, vom untersuchten Punkt ausgehende Risse betrachtet. Dabei sind die Vernetzung sowie das Postprocessing zur Ermittlung der relevanten Kenngrößen automatisiert. Weiterhin wird das entstehende nichtlineare Optimierungsproblem für die Versagenslast formuliert und eine Optimierungsprozedur zur effizienten numerischen Lösung bereitgestellt. Experimentelle Ergebnisse an gekerbten Proben aus PMMA werden mit asymptotischen und numerischen Lösungen verglichen.

Weiterhin werden die Anwendungsgrenzen asymptotischer Lösungen anhand exemplarischer Geometrien bewertet. Mit Hilfe des numerischen Modells wird ein neuer Zugang zur Delamination infolge von Randeffekten in CFK-Laminaten bereitgestellt und anhand experimenteller Ergebnisse validiert. Nachdem mit dem Modell bislang überwiegend akademische Beispiele bewertet wurden, soll im Rahmen dieser Arbeit auch die Anwendbarkeit auf ein praxisnahes technisches Problem aufgezeigt werden. Dazu werden thermomechanisch beanspruchte Glaskeramikfügungen in Hochtemperatur-Brennstoffzellenstapeln betrachtet, die mit Hilfe des entwickelten Verfahrens bewertet werden. Anhand des Studiums alternativer Entwürfe wird mechanisches Optimierungspotential für diese innovative Anwendung aufgezeigt.

Die Arbeit ist in fünf Kapitel aufgeteilt. Kapitel 1 enthält theoretische Grundlagen zur linearen Elastizitätstheorie, zur Mechanik ebener Lamine und zu Lösungsverfahren für Randwertprobleme. Weiterhin werden Grundlagen der Bruchmechanik dargestellt. In Kapitel 2 wird das hybride Versagensmodell vorgestellt. Neben neuen und bekannten asymptotischen Formulierungen wird insbesondere die neue direkte numerische Formulierung vorgestellt. Kapitel 3 ist der Analyse und Bewertung exemplarischer Spannungskonzentrationen gewidmet. Anhand experimenteller Ergebnisse an gekerbten Proben aus PMMA wird mit der neuen direkten numerischen Formulierung die Anwendbarkeit asymptotischer Formulierungen bewertet. Für das Problem der Delamination infolge von Randeffekten bei CFK-Laminaten wird mit dem entwickelten numerischen Modell ein neuer Zugang bereitgestellt und mit Experimenten verglichen. In Kapitel 4 wird das Modell auf thermomechanisch beanspruchte Glaskeramikfügungen in Hochtemperatur-Brennstoffzellenstacks angewendet. Nach einer Einführung in die Problemstellung folgt eine Analyse des Ausgangsentwurfs. Anhand der Analyse alternativer Entwürfe wird strukturmechanisches Optimierungspotential für die Zellen ausgewiesen. Kapitel 5 schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

# Kapitel 1

## Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen für die folgenden Ausführungen bereitgestellt. Neben einigen Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie werden die Themenbereiche Mechanik ebener Laminate, Lösungsverfahren für Randwertprobleme sowie Grundlagen der Bruchmechanik behandelt. Diese Abschnitte stellen keine umfassende Einführung dar, sondern dienen insbesondere der Dokumentation der verwendeten Methoden und der Vereinheitlichung der Nomenklatur. Auf weiterführende Fachliteratur wird jeweils verwiesen.

### 1.1 Lineare Elastizitätstheorie

Grundlegend für alle Betrachtungen in dieser Arbeit ist die lineare Elastizitätstheorie. Sie setzt kleine Deformationen sowie linear-elastisches Materialverhalten voraus und bietet die Möglichkeit zur Studie grundlegender Effekte sowie die Basis für vielfältige Erweiterungen. Umfassende Darstellungen finden sich in der einschlägigen Fachliteratur<sup>1</sup>.

#### 1.1.1 Grundgleichungen

##### Spannungen

Als Maß für die Spannungen dient der Cauchysche Spannungstensor:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} . \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Vgl. z. B. Becker und Gross [15], Eschenauer und Schnell [49], Green und Zerna [64], Hahn [71], Mußchelischwili [170], Ogden [179] und Sadd [208].

In der Indexschreibweise kennzeichnen lateinische Kleinbuchstaben Indizes von eins bis drei. Der Tensor ist symmetrisch, wie sich z. B. durch Auswertung des Momentengleichgewichts am infinitesimalen Volumenelement zeigen lässt:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad . \quad (1.2)$$

Alternativ werden die Richtungen 1, 2, 3 mit  $x, y, z$ , Normalspannungskomponenten mit  $\sigma$  und Schubspannungskomponenten mit  $\tau$  bezeichnet:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad . \quad (1.3)$$

Mit der Cauchyschen Formel

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.4)$$

wird der Normalenvektor eines infinitesimal kleinen Flächenelements auf den zugehörigen Spannungsvektor

$$[t_i] = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta [p_i]}{\Delta A} \quad (1.5)$$

abgebildet, wobei  $[p_i]$  für den resultierenden Schnittkraftvektor steht. Dabei wird gemäß Konvention über in einem Term doppelt vorkommende Indizes von eins bis drei summiert.

In manchen Fällen ist die folgende Aufspaltung des Spannungstensors sinnvoll:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij} \quad , \quad (1.6)$$

wobei  $\delta_{ij}$  für das Kronecker-Symbol steht. Dabei wird der erste Summand als hydrostatischer Spannungszustand oder Kugeltensor bezeichnet, den zweiten Summanden nennt man Spannungsdeviator oder deviatorischen Spannungsanteil.

## Gleichgewichtsbedingungen

Damit der Körper im Gleichgewicht ist, müssen die lokalen Bedingungen

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.7)$$

erfüllt sein, wobei  $[f_i]$  für den Volumenkraftvektor steht.

## Verschiebungen und Verzerrungen

Das Verschiebungsfeld wird mit dem Verschiebungsvektor

$$[u_i] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

dargestellt, der auch zur Ermittlung der Verzerrungen ausgewertet wird. Die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

werden über die kinematische Beziehung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.10)$$

berechnet, woraus die Symmetrie

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.11)$$

folgt. Sie sind ein Maß für die durch das Material erfahrenen Dehnungen und Gleitungen. Dabei steht das Komma im Index für die partielle Ableitung nach  $x_i$ . In anderer Schreibweise werden die Richtungen 1, 2, 3 mit  $x, y, z$ , die Normalverzerrungen mit  $\varepsilon$  und die technischen Gleitungen mit  $\gamma$  bezeichnet:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad (1.12)$$

Ähnlich der Aufspaltung des Cauchyschen Spannungstensors kann auch der linearisierte Verzerrungstensor additiv zerlegt werden:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij} . \quad (1.13)$$

Dabei beschreibt der erste Anteil eine reine Volumendehnung und der zweite, deviatorische, Anteil eine reine Gestaltsänderung bei gleichbleibendem Volumen.

### Kompatibilitätsbedingungen

Zur Verhinderung eventuell auftretender Klaffungen oder Überlappungen müssen die Verzerrungen Integrabilitätsbedingungen der Form

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1.14)$$

erfüllen. Für die Indexpaarungen  $(i, j), (k, l) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3), (1, 2)$  ergeben sich sechs verschiedene Bedingungen, von denen jeweils drei unabhängig voneinander sind.

## Elastizitätsgesetz

Bei linear-elastischem Materialverhalten wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.15)$$

beschrieben, wobei  $[c_{ijkl}]$  für den Elastizitätstensor vierter Stufe steht. Aufgrund der Symmetrien von Spannungs- und Verzerrungstensor sowie aufgrund in Abschnitt 1.1.2 näher ausgeführter energetischer Argumente weist er folgende Symmetrien auf:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad , \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad , \quad c_{ijkl} = c_{klij} \quad . \quad (1.16)$$

Der Nachgiebigkeitstensor  $[s_{ijkl}]$  besitzt die gleichen Symmetrieeigenschaften und verknüpft Spannungen und Verzerrungen wie folgt:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad . \quad (1.17)$$

Für isotropes Materialverhalten können die Komponenten des Elastizitätstensors wie folgt ausgedrückt werden:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad . \quad (1.18)$$

Die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  werden Lamésche Konstanten genannt. Sie hängen mit den technischen Größen Elastizitätsmodul  $E$ , Querkontraktionszahl  $\nu$  und Schubmodul  $G$  wie folgt zusammen:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad . \quad (1.19)$$

Bei linear-elastischem Materialverhalten lässt sich das Elastizitätsgesetz unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_1 \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_2 \quad , \quad \sigma_{33} = \sigma_3 \quad , \quad \sigma_{23} = \sigma_4 \quad , \quad \sigma_{13} = \sigma_5 \quad , \quad \sigma_{12} = \sigma_6 \quad , \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \quad , \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \quad , \quad 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4 \quad , \quad 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5 \quad , \quad 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (1.20)$$

auch in einfach indizierter Voigtscher Notation ausdrücken:

$$\sigma_A = C_{AB} \varepsilon_B \quad , \quad (1.21)$$

wobei  $[C_{AB}]$  für die Elastizitätsmatrix steht. Die lateinischen Großbuchstaben bezeichnen Indizes von eins bis sechs. Bei orthotropem Materialverhalten mit drei zueinander senkrechten Symmetrieebenen, wie es zum Beispiel bei durch Gewebelagen mit senkrecht aufeinander stehenden Faserrichtungen verstärkten Kunststoffen der Fall ist, sind zur Beschreibung neun unabhängige Konstanten notwendig:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad . \quad (1.22)$$

Die bei einer Temperaturänderung  $\Delta T = T - T_0$  von einer Ausgangstemperatur  $T_0$  auf die aktuelle Temperatur  $T$  entstehenden Temperaturverzerrungen  $\varepsilon_{ij}^T$  können in erster Näherung über die linearen Temperatúrausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{ij}$  beschrieben werden

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} \Delta T \quad , \quad (1.23)$$

die Komponenten eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe sind. Die Gesamtverzerrungen ergeben sich durch Addition mechanischer und thermischer Anteile:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T \quad . \quad (1.24)$$

## Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung eines elastomechanischen Randwertproblems sind noch kinematische und dynamische Randbedingungen erforderlich:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^* \quad \text{auf } \partial V_t \quad , \quad (1.25)$$

$$u_i = u_i^* \quad \text{auf } \partial V_u \quad . \quad (1.26)$$

Hierbei bezeichnen  $\partial V_t$  und  $\partial V_u$  die Teile des gesamten Randes  $\partial V$  des betrachteten Gebiets auf denen dynamische bzw. kinematische Randbedingungen vorliegen.

## 1.1.2 Energiebetrachtungen

### Formänderungsenergie

Bei der Deformation eines Körpers vom unverzerrten Ausgangszustand bis zur Momentankonfiguration mit den Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$  wird die Formänderungsarbeit  $W$  geleistet, die sich durch Integration ergibt:

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad . \quad (1.27)$$

Bei einem elastischen Körper hängt  $W$  nur vom durch  $\varepsilon_{ij}$  charakterisierten aktuellen Verzerrungszustand ab und nicht von der Deformationsgeschichte. Folglich ist das Arbeitsinkrement  $dW$  das vollständige Differential  $dU$  einer Zustandsgröße  $U(\varepsilon_{ij})$ , die Formänderungsenergiegedichte oder spezifisches elastisches Potential genannt wird. Somit gilt

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (1.28)$$

und für die Spannungen folgt

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad . \quad (1.29)$$



Bei linear-elastischem Materialverhalten gemäß dem Hookeschen Gesetz (1.15) gilt für die Komponenten des Elastizitätstensors

$$c_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} . \quad (1.30)$$

Mit (1.29) und wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungsreihenfolge folgt

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{klij} , \quad (1.31)$$

womit die in Abschnitt 1.1.1 vorweggenommene dritte Symmetrieeigenschaft des Elastizitätstensors begründet werden kann. Außerdem gilt bei linear-elastischem Materialverhalten für die Formänderungsenergie

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij} \right) \left( \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij} \right) = \frac{1}{6} \sigma_{kk} \varepsilon_{ll} + \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} , \quad (1.32)$$

wobei der erste Summand als Volumenänderungsenergie  $U_V$  und der zweite Summand als Gestaltänderungsenergie  $U_G$  bezeichnet wird.

## Energiesatz

Gemäß dem Energiesatz der Kontinuumsmechanik entspricht die zeitliche Änderung der Gesamtenergie, der Summe aus innerer und kinetischer Energie, eines Körpers dem Energiefluss in den Körper. Es gilt

$$\dot{E} + \dot{K} = P_t + P_f + Q , \quad (1.33)$$

wobei  $E$  die innere Energie,  $K$  die kinetische Energie,  $P_t$  die Leistung der Randlasten und  $P_f$  die Leistung der Volumenkräfte sind. Sie sind durch die Beziehungen

$$E = \int_V \rho \tilde{e} dV , \quad K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV , \quad P_t = \int_{\partial V} t_i^* \dot{u}_i dA , \quad P_f = \int_V \rho f_i \dot{u}_i dV \quad (1.34)$$

gegeben. Dabei steht  $\rho$  für die Dichte und  $\tilde{e}$  für die spezifische innere Energie, deren Produkt beim elastischen Körper der Formänderungsenergiedichte, bzw. dem spezifischen elastischen Potential entspricht. Durch  $Q$  wird der nicht durch  $P_t$  und  $P_f$  erfasste Energietransport in den Körper beschrieben.

## Prinzip der virtuellen Verrückungen

Äquivalente Aussagen zu den Gleichgewichtsbedingungen lassen sich auch über Variations- und Energieprinzipien gewinnen. Bei dem aus energetischen Betrachtungen herleitbaren Prinzip der virtuellen Verrückungen wird ein virtuelles kinematisches System  $\delta u_i$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$  auf das wirkliche System aufgebracht und die Arbeitsbilanz ausgewertet:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{\partial V_t} t_i^* \delta u_i dA . \quad (1.35)$$

Dabei gilt für die virtuellen Größen, dass sie infinitesimal klein, kinematisch zulässig und mit den geometrischen Randbedingungen verträglich sind. Weil die linke Seite auch als innere virtuelle Arbeit  $\delta W^i$  und die rechte Seite als äußere virtuelle Arbeit  $\delta W^a$  bezeichnet werden, wird das Prinzip auch Prinzip der virtuellen Arbeiten genannt:

$$\delta W^i = \delta W^a \quad . \quad (1.36)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Prinzip unabhängig vom Materialverhalten gilt und auch für große Deformationen herleitbar ist.

### 1.1.3 Ebene Probleme

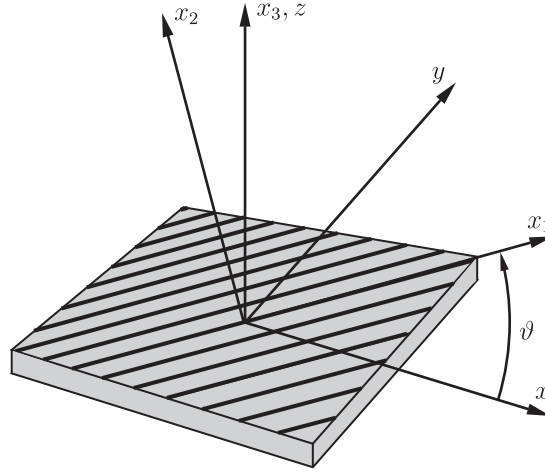
Die Lösung räumlicher elastizitätstheoretischer Probleme ist analytisch oft schwierig und numerisch aufwendig. In vielen Fällen kann das Problem als eben abstrahiert und effizienter gelöst werden. Drei wichtige Spannungs- und Verzerrungszustände, bei denen sich die Grundgleichungen entsprechend vereinfachen, finden dabei oft Verwendung:

- longitudinaler Schubspannungszustand (LSZ):  $u = v = 0$ ,  $w = w(x, y)$ ,
- ebener Verzerrungszustand (EVZ):  $w = 0$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  und
- ebener Spannungszustand (ESZ):  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ ,  
 $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ .

## 1.2 Mechanik ebener Lamine

### 1.2.1 Klassische Laminattheorie

Die Beschreibung des Deformationsverhaltens von Mehrschichtverbunden erfordert strukturmechanische Theorien, welche den durch den Lagenaufbau hervorgerufenen Effekten gerecht werden. Hier sei insbesondere die etablierte klassische Laminattheorie erwähnt, mit der das Verformungsverhalten dünner Lamine gut beschrieben werden kann. Sie ist eine direkte Verallgemeinerung der gewöhnlichen Scheiben- und der Kirchhoffschen Platten-theorie. Ausgehend von Aufbau und mechanischem Verhalten einer Laminat-Einzelschicht wird das Verhalten des Mehrschichtverbundes beschrieben. Für umfassende Darstellungen, insbesondere von erweiterten Theorien, sei auf die einschlägige Fachliteratur<sup>2</sup> verwiesen.



**Bild 1.1:** Unidirektional verstärkte Einzelschicht mit Koordinatensystemen.

### Verhalten einer Laminat-Einzelschicht

Für orthotropes Materialverhalten lautet das Hookesche Gesetz im kartesischen, in Bild 1.1 dargestellten,  $x_1, x_2, x_3$ -Materialhauptachsensystem der Laminat-Einzelschicht:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Die neun unabhängigen Steifigkeiten  $C_{ij}$  ergeben sich aus den sogenannten verallgemeinerten Ingenieurkonstanten (Elastizitätsmoduln, Querkontraktionszahlen, Schubmoduln) nach den folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

wobei

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

Aus der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix lassen sich die Reziprozitätsrelationen

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (1.39)$$

---

<sup>2</sup>Vgl. z. B. Altenbach et al. [4], Becker und Gross [15], Jones [97], Lekhnitskii [134, 135], Reddy [199] und Tsai und Hahn [234].

herleiten, so dass neun unabhängige Ingenieurkonstanten vorliegen. Wie in der gewöhnlichen Scheibentheorie und der Kirchhoffschen Plattentheorie wird in der Einzelschicht ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt:

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{13} = 0 \quad . \quad (1.40)$$

Dann ergibt sich aus (1.37) die folgende Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} , \quad (1.41)$$

wobei folgender Zusammenhang zwischen Ingenieurkonstanten und reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  besteht:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{66} = G_{12} \quad . \quad (1.42)$$

Zur Berechnung von Mehrschichtverbunden ist jedoch die Einführung des in Bild 1.1 dargestellten, um den Winkel  $-\vartheta$  gedrehten, globalen  $x, y, z$ -Laminat-Koordinatensystems sinnvoll, um darin Feldgrößen, Feldgleichungen und Randbedingungen zu formulieren. Darin ergibt sich das Hookesche Gesetz für die Laminat-Einzelschicht in der folgenden Form:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} , \quad (1.43)$$

wobei sich der folgende Zusammenhang zwischen reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  und transformierten reduzierten Steifigkeiten  $\bar{Q}_{ij}$  aus der Tensortransformation für die Drehung der Koordinatensysteme für Spannungs- und Verzerrungstensor ins Laminatkoordinatensystem herleiten lässt:

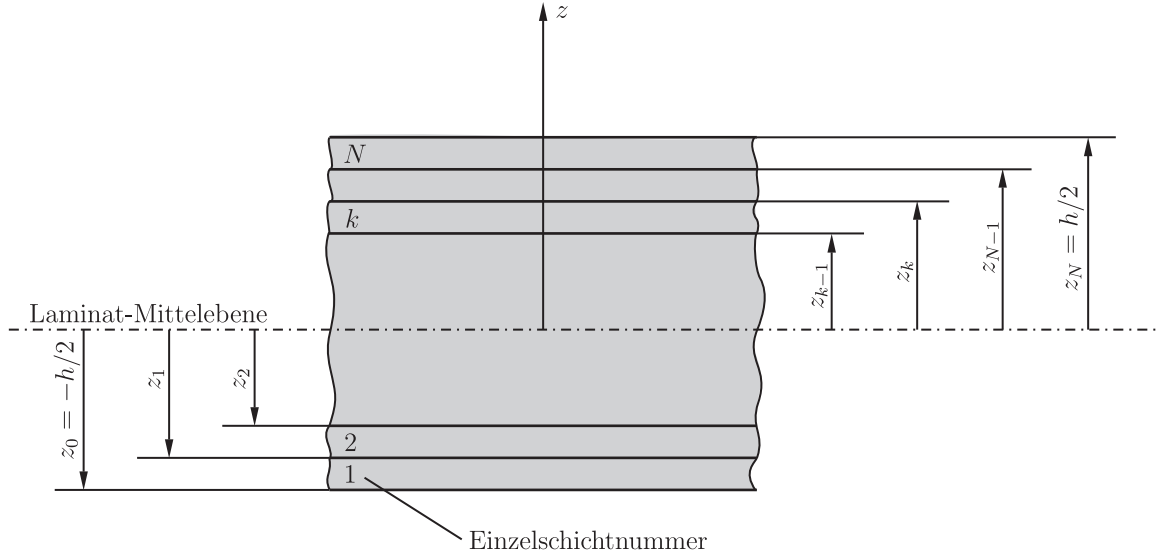
$$[\bar{Q}] = [T] [Q] [T]^T , \quad (1.44)$$

mit

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & -2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} .$$

## Verhalten eines Mehrschichtverbundes

Zur mechanischen Beschreibung des Gesamtlaminats werden kinematische Annahmen formuliert und die Schnittgrößen durch Integration über die Dicke ermittelt. Wie aus Bild 1.2 ersichtlich, wird die Koordinate  $z$  in Dickenrichtung von der Laminat-Mittelebene aus gezählt. Ebenso ist die übliche Numerierung der Schichten dargestellt.



**Bild 1.2:** Bezeichnung der Einzelschichten.

Aus den kinematischen Annahmen

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) - z w_{,x}^0(x, y) \quad , \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - z w_{,y}^0(x, y) \quad , \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y) \quad , \end{aligned} \quad (1.45)$$

folgen durch Einsetzen in (1.10) die Verzerrungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x}^0 \\ v_{,y}^0 \\ u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} w_{,xx}^0 \\ w_{,yy}^0 \\ 2w_{,xy}^0 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

und durch Einsetzen von (1.43) folgendes Elastizitätsgesetz für die  $k$ -te Einzelschicht:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.47)$$

Integration in Dickenrichtung liefert die folgenden Beziehungen für die Schnittkräfte:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (1.48)$$

und die Schnittmomente:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (1.49)$$

Unter Verwendung von (1.47) lassen sich die konstitutiven Beziehungen mit Einführung der Laminatsteifigkeitsmatrix zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

deren Komponenten nach den folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \, dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad , \\ B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \, z \, dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad , \\ D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \, z^2 \, dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Die Komponenten  $A_{ij}$  werden Dehnsteifigkeiten, die Komponenten  $B_{ij}$  Kopplungssteifigkeiten und die Komponenten  $D_{ij}$  Biegesteifigkeiten genannt. Die Laminatsteifigkeitsmatrix charakterisiert das mechanische Verhalten eines gegebenen Laminats und ist entscheidend für die Komplexität des resultierenden Randwertproblems. Hier seien insbesondere die Kopplungssteifigkeiten  $B_{ij}$  genannt, bei deren Vorhandensein Scheiben- und Plattenverhalten des Laminats gekoppelt sind.

### Gleichgewichtsbedingungen

Weiterhin wird das Randwertproblem durch die Scheiben- und Plattengleichgewichtsbedingungen beschrieben:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= -p_x \quad , \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= -p_y \quad , \\ M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} &= -p \quad . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Hierbei bezeichnen  $p_x$  und  $p_y$  die äußeren Kräfte, die pro Mittelflächeneinheit auf das Laminat wirken;  $p$  bezeichnet die Flächenlast in Normalenrichtung. Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems gehören noch die Randbedingungen, welche gemäß dem vorliegenden Problem formuliert werden müssen.

## Hygrothermische Probleme

Bedingt durch Fertigung und Einsatz entstehen im Laminat zusätzlich zu den gegebenen mechanischen Lasten hygrothermische Lasten, die auch im Rahmen der klassischen Laminattheorie berücksichtigt werden können. Analog zu den thermischen Dehnungen in (1.23) entstehen durch Änderungen  $\Delta c = c - c_0$  der Feuchtigkeits-Massenkonzentration  $c$  hygri-sche Dehnungen

$$\varepsilon_{ij}^H = \beta_{ij} \Delta c \quad , \quad (1.53)$$

wobei die Feuchtigkeitsausdehnungskoeffizienten  $\beta_{ij}$  einen Tensor zweiter Stufe bilden.

In das Elastizitätsgesetz für die Einzelschicht gehen nur mechanische Dehnungen ein:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta c \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta c \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad (1.54)$$

bzw. im Laminat-Koordinatensystem

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta c \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta c \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta c \end{bmatrix} \quad . \quad (1.55)$$

Die Integration über die Dicke liefert

$$\begin{bmatrix} N_x + N_x^T + N_x^H \\ N_y + N_y^T + N_y^H \\ N_{xy} + N_{xy}^T + N_{xy}^H \\ M_x + M_x^T + M_x^H \\ M_y + M_y^T + M_y^H \\ M_{xy} + M_{xy}^T + M_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad , \quad (1.56)$$

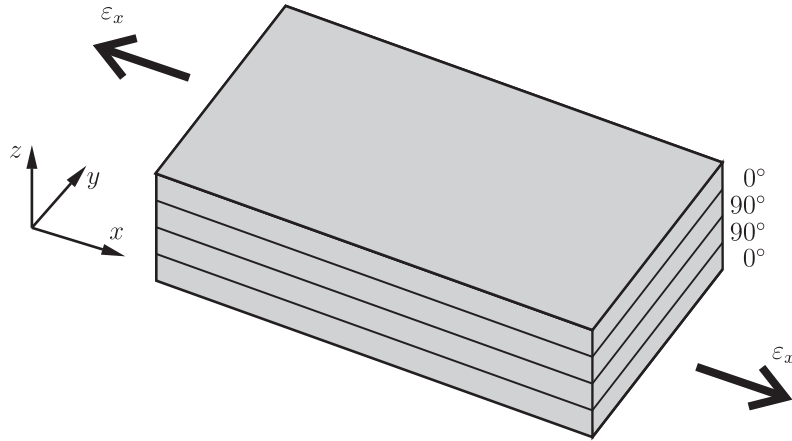
wobei

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T dz \quad , \quad (1.57)$$

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T z dz \quad , \quad (1.58)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} \Delta c dz \quad , \quad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} \Delta c z dz \quad . \quad (1.60)$$

Bild 1.3:  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Zugprobe.

### 1.2.2 Laminat-Randeffekt

Obwohl die klassische Laminattheorie eine gute Beschreibung des globalen Deformationsverhaltens dünner, ebener Laminate liefert, kann sie, insbesondere durch die zugrundeliegenden Annahmen, einige auftretende Phänomene nur unzureichend beschreiben. Hierzu gehört auch der Laminat-Randeffekt, die durch sprunghafte Steifigkeitsänderungen an den Schichtgrenzen hervorgerufene charakteristische dreidimensionale Spannungsverteilung an Laminaträndern. Dazu bietet die klassische Laminattheorie aufgrund der Vernachlässigung der interlaminaren Spannungen  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  keinen Zugang. Des Weiteren können Spannungsrandbedingungen nur über die integralen Schnittgrößen formuliert werden.

#### Randeffekt beim symmetrischen Kreuzverbund

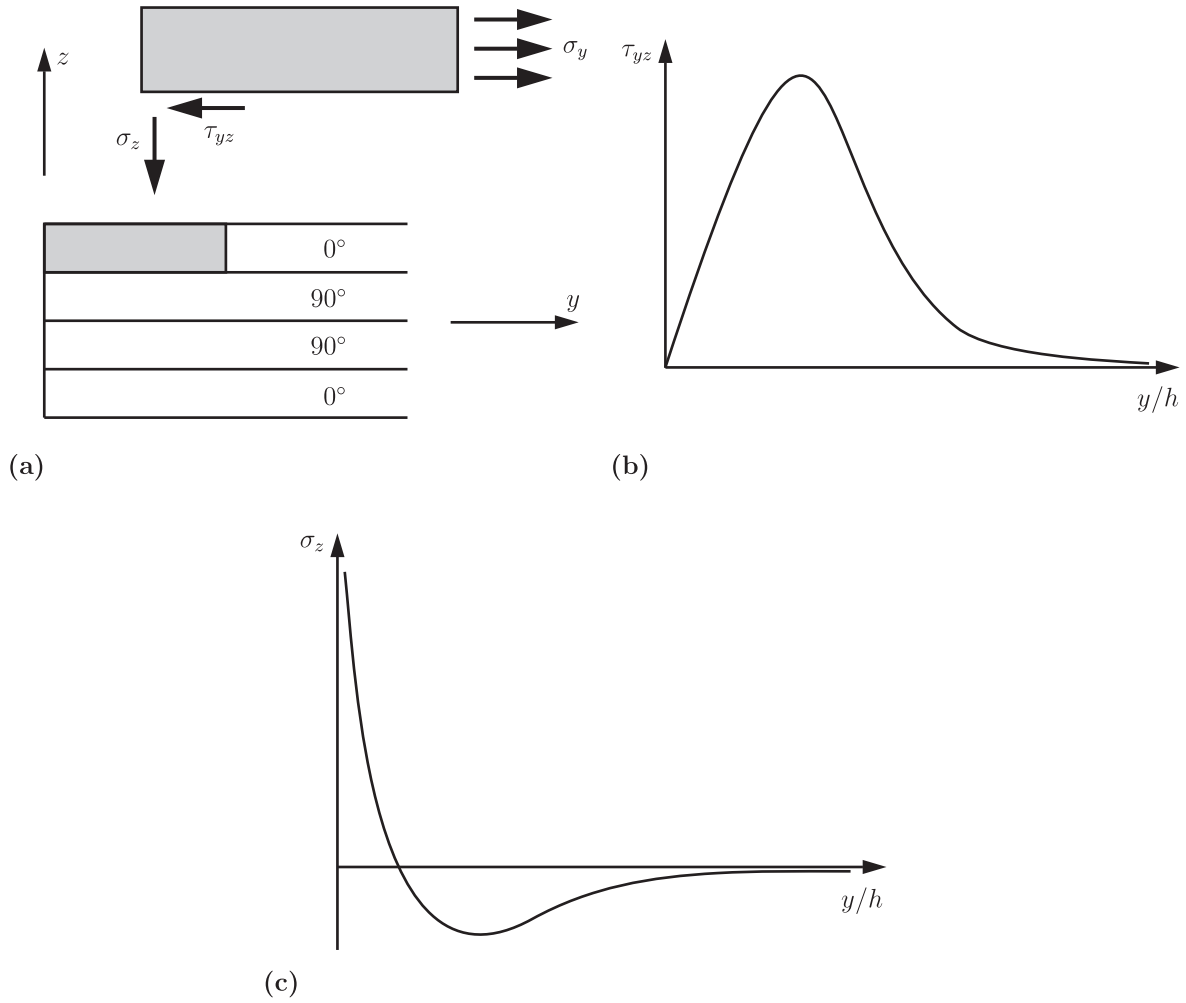
Für die in Bild 1.3 gezeigte  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Probe unter uniaxialer Normalkraftbelastung  $N_x$  lassen sich an den seitlichen Rändern zwar verschwindende Normalkräfte  $N_y$  realisieren, aber keine verschwindenden Einzelschichtspannungen  $\sigma_y$ . Aus elementaren Gleichgewichtsüberlegungen am, in Bild 1.4a dargestellten, freigeschnittenen Element am Rand der Deckschicht<sup>3</sup> lässt sich aber auf das Vorhandensein von interlaminaren Spannungen  $\tau_{yz}$  und  $\sigma_z$  schließen. Am rechten inneren Schnittufer liegt, in hinreichend großer Entfernung zum freien Rand, gemäß der klassischen Laminattheorie, die Zugspannung  $\sigma_y$  vor, die am linken Schnittufer aufgrund des spannungsfreien Randes verschwinden muss. So müssen zur Erfüllung des Kräftegleichgewichts in  $y$ -Richtung Schubspannungen  $\tau_{yz}$  vorhanden sein:

$$\int_0^y \tau_{yz} d\bar{y} = \int_{h/4}^{h/2} \sigma_y dz \quad . \quad (1.61)$$

Der qualitative Verlauf der Schubspannung  $\tau_{yz}$  ist in Bild 1.4b dargestellt. So verschwindet  $\tau_{yz}$  am Rand aufgrund der Randbedingung, durchläuft in Randnähe ein Maximum und

<sup>3</sup>Vgl. z. B. Becker [14].





**Bild 1.4:** Freigeschnittenes Deckschichtelement der  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Zugprobe (a), qualitativer Verlauf der Schubspannung  $\tau_{yz}$  (b), qualitativer Verlauf der Normalspannung  $\sigma_z$  (c).

nimmt im Laminatinneren ( $y/h \gg 1$ ) wieder ab, wo dann nur noch die intralaminaren Spannungen gemäß der klassischen Laminattheorie vorliegen.

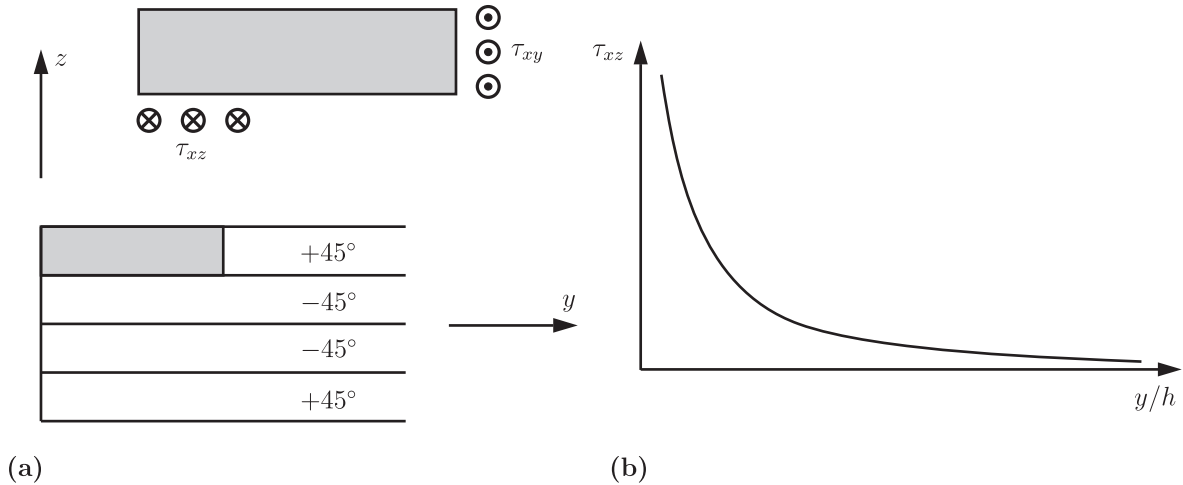
Die Erfüllung des Momentengleichgewichts um die  $x$ -Achse fordert auch „Schälspannungen“  $\sigma_z$  am Rand:

$$\int_0^y \sigma_z \bar{y} d\bar{y} = - \int_{h/4}^{h/2} \sigma_y \left( z - \frac{h}{4} \right) dz . \quad (1.62)$$

Deren qualitativer Verlauf ist in Bild 1.4c dargestellt. Am linken freien Rand liegt eine Singularität vor. Im Laminatinneren ( $y/h \gg 1$ ) klingen die Spannungen auf Null ab. Dazwischen muss mindestens ein Nulldurchgang liegen, der sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\int_0^y \sigma_z d\bar{y} = 0 \quad (1.63)$$

ergibt.



**Bild 1.5:** Freigeschnittenes Deckschichtelement der  $[\pm 45^\circ]_S$ -Zugprobe (a), qualitativer Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  (b).

### Randeffekt beim symmetrischen Winkelverbund

Stellt man ähnliche Überlegungen für eine Zugprobe mit  $[\pm 45^\circ]_S$ -Lagenaufbau an, so lässt sich die Existenz einer interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  folgern. Hierbei kann im Rahmen der klassischen Laminattheorie am freien Rand wohl eine verschwindende Schubkraft  $N_{xy}$  realisiert werden, aber keine verschwindenden Einzelschichtspannungen  $\tau_{xy}$ . Wieder wird, wie in Bild 1.5a dargestellt, ein Element der Deckschicht am Rand freigeschnitten. Am rechten Schnittufer liegt, in hinreichend großer Entfernung vom freien Rand, gemäß der klassischen Laminattheorie, aufgrund der Schubkopplungseigenschaft der Einzelschicht eine Schubspannung  $\tau_{xy}$  vor, die am linken Rand aufgrund des spannungsfreien Randes verschwinden muss. Die Forderung des Kräftegleichgewichts in  $x$ -Richtung

$$\int_0^y \tau_{xz} d\bar{y} = \int_{h/4}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (1.64)$$

lässt in Randnähe auf die Existenz einer Schubspannung  $\tau_{xz}$  schließen. Deren qualitativer Verlauf ist in Bild 1.5b dargestellt. Am linken Rand liegt eine Singularität vor, während die Schubspannungen  $\tau_{xz}$  im Laminatinneren ( $y/h \gg 1$ ) abklingen und verschwinden.

In realen Bauteilen kann der Laminat-Randeffekt zu vorzeitigem Laminatversagen durch Randdelaminationen in den Grenzflächen zwischen den Einzelschichten führen. Auch Grenzflächen zwischen Grundlaminat und aufgeklebten Pflastern können betroffen sein. Da die interlaminaren Spannungen von der Schichtfolge abhängen, wird damit die effektive Festigkeit auch abhängig von der Schichtfolge. Deshalb sind geeignete Zugänge und Theorien zur Erklärung und Beurteilung des Laminat-Randeffekts erstrebenswert. So wurden in den letzten Dekaden weitreichende Untersuchungen angestellt, die bis heu-

te andauern<sup>4</sup>. Einen verbesserten Zugang zu interlaminaren Spannungen können Laminattheorien höherer Ordnung mit erweiterten Spannungs- und Verschiebungsansätzen geben. Zur speziellen Beschreibung des Laminat-Randeffekts sind insbesondere analytische und semi-analytische Näherungslösungen und numerische Untersuchungen, z. B. mittels der Methode der finiten Differenzen oder der Methode der finiten Elemente, zu nennen.

## 1.3 Lösungsverfahren für Randwertprobleme

Zur Lösung der bei praktischen Anwendungen entstehenden elastizitätstheoretischen Randwertprobleme wurden vielfältige analytische und numerische Lösungsverfahren entwickelt. Aus der Fülle an Verfahren sollen hier die im Rahmen der Arbeit zur Herleitung der Rissspitzenfelder verwendete Methode der komplexen Potentiale sowie die Methode der finiten Elemente kurz vorgestellt werden.

### 1.3.1 Komplexe Methode

Dieses fruchtbare Verfahren ermöglicht die Lösung ebener Probleme durch Betrachtung im Komplexen. Die entstehenden Differentialgleichungen werden durch beliebige komplexe holomorphe Funktionen identisch erfüllt, die jedoch so gewählt werden müssen, dass die Randbedingungen erfüllt werden. Es sei angemerkt, dass die komplexe Methode neben den hier vorgestellten Anwendungen z. B. auch auf Platten- und Laminatprobleme<sup>5</sup> übertragbar ist.

#### Longitudinaler Schubspannungszustand

Im longitudinalen Schubspannungszustand lässt sich durch Einsetzen der verbleibenden Gleichungen aus kinematischen Beziehungen (1.10) und Elastizitätsgesetz (1.15) in die Gleichgewichtsbedingungen (1.7) für verschwindende Volumenkräfte die folgende Potentialgleichung

$$\mu \Delta w(x, y) = 0 \quad (1.65)$$

mit  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  für die Verschiebungen herleiten. Diese wird durch den Real- oder Imaginärteil einer beliebigen holomorphen komplexen Funktion  $\Omega(z)$  erfüllt<sup>6</sup>. Damit stellen sich die Gleichungen der komplexen Methode im longitudinalen Schubspannungszustand wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= \Omega'(z) \quad , \\ \mu w &= \operatorname{Re}(\Omega(z)) \quad , \end{aligned} \quad (1.66)$$

---

<sup>4</sup>Vgl. z. B. Herakovich [90], Kant und Swaminathan [99] und Mittelstedt und Becker [154, 155].

<sup>5</sup> Vgl. z. B. Lekhnitskii [134, 135] und Becker [13, 14].

<sup>6</sup>Vgl. z. B. Mušchelischwili [170].

wobei  $(\dots)'$  für die Ableitung nach dem komplexen Argument  $z$  steht. In Polarkoordinaten lautet die Beziehung für die Spannungen

$$(\tau_{rz} - i\tau_{\varphi z}) e^{-i\varphi} = \Omega'(z) . \quad (1.67)$$

### Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand

Die identische Struktur der Gleichungen im ebenen Spannungs- und Verzerrungszustand ermöglicht die Verwendung der gleichen Lösungsverfahren. Zunächst wird eine skalare Airysche Spannungsfunktion  $F(x, y)$  eingeführt, aus der sich die Spannungen gemäß

$$\sigma_x = F_{,yy} , \quad \sigma_y = F_{,xx} , \quad \tau_{xy} = -F_{,xy} \quad (1.68)$$

ableiten. Somit erfüllt das Spannungsfeld automatisch die Gleichgewichtsbedingungen (1.7) für verschwindende Volumenkräfte und Thermaldehnungen. Unter Verwendung des Elastizitätsgesetzes (1.15) erhält man durch Einsetzen in die verbleibende Kompatibilitätsbedingung (1.14) die folgende Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (1.69)$$

für die Airysche Spannungsfunktion.

Im Rahmen der komplexen Methode werden die Feldgrößen als Funktionen der komplexen Variablen  $z = x + iy = re^{i\varphi}$  und  $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$  mit  $i = \sqrt{-1}$  betrachtet. Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} , \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (1.70)$$

nimmt die Bipotentialgleichung (1.69) im Komplexen die folgende Form an:

$$4 \frac{\partial^4 F(z, \bar{z})}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 . \quad (1.71)$$

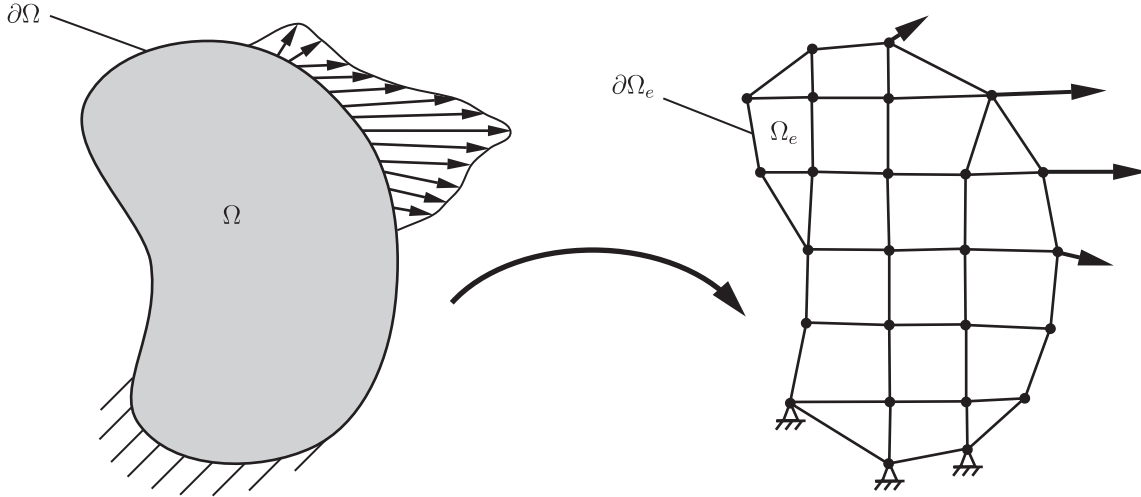
Diese partielle Differentialgleichung wird durch zwei beliebige holomorphe komplexe Funktionen befriedigt<sup>7</sup>, wenn man

$$F = \operatorname{Re} (\bar{z}\Phi(z) + \chi(z)) \quad (1.72)$$

wählt. Nach Einführung von  $\Psi(z) = \chi'(z)$  lassen sich unter Verwendung von (1.68) und den Grundgleichungen die sogenannten Kolosovschen Formeln herleiten:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 (\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(z)) , \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 (\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)) , \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\Phi(z) - z\bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z) . \end{aligned} \quad (1.73)$$

<sup>7</sup>Vgl. z. B. Muschelischwili [170].



**Bild 1.6:** Diskretisierung eines Gebiets.

Die Materialkonstante  $\kappa$  wird für den ebenen Spannungszustand bzw. für den ebenen Verzerrungszustand wie folgt berechnet:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{ESZ} \end{cases} . \quad (1.74)$$

Durch Tensortransformation lassen sich die Gleichungen in Polarkoordinaten transformieren:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\varphi &= 2 \left( \Phi'(z) + \overline{\Phi}'(z) \right) , \\ \sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} &= 2 \left( z\Phi''(z) + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} \right) , \\ 2\mu(u_r + iu_\varphi) &= \left( \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z) \right) e^{-i\varphi} . \end{aligned} \quad (1.75)$$

### 1.3.2 Finite-Elemente-Methode

Insbesondere bei der Berücksichtigung komplexer Geometrien und Randbedingungen stoßen analytische Vorgehensweisen an Grenzen. Hierzu wurden effiziente numerische Methoden entwickelt, die auch die Behandlung inelastischer Probleme und großer Deformationen ermöglichen. Zu den gängigsten Verfahren gehört die Methode der finiten Elemente, die hier einführend für elastizitätstheoretische Probleme im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand in einer verschiebungsbasierten Formulierung vorgestellt werden soll. Für vielfältige Erweiterungen und Details sei auf die einschlägige Fachliteratur<sup>8</sup> verwiesen.

## Diskretisierung

Grundlegend für die Methode ist die in Bild 1.6 dargestellte Diskretisierung des Gebiets  $\Omega$  mit  $n_e$  finiten Elementen  $\Omega_e$ :

$$\Omega \approx \tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e . \quad (1.76)$$

Innerhalb der Elemente werden Geometrie  $\tilde{\mathbf{x}}$  und Verschiebungen  $\tilde{\mathbf{u}}$  durch die Formfunktionen  $N_i^G(\xi, \eta)$  und  $N_i^V(\xi, \eta)$  im lokalen  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem interpoliert:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_{ke}} N_i^G(\xi, \eta) \mathbf{x}_i , \quad \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n_{ke}} N_i^V(\xi, \eta) \mathbf{v}_i , \quad (1.77)$$

wobei  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{v}_i$  für die Koordinaten und Verschiebungen der  $n_{ke}$  Knoten pro Element stehen. Zur besseren Lesbarkeit sind in diesem Abschnitt die Tensorgrößen in symbolischer Matrixnotation mit fett gedruckten Symbolen dargestellt. Die Formfunktionen haben die Eigenschaft, dass sie am zugehörigen Knoten den Wert eins annehmen und den Wert null an allen anderen Knoten. Im Rahmen des gängigen und nachfolgend verwendeten isoparametrischen Konzepts werden Geometrie und Verschiebungsfeld durch gleiche Ansätze  $N_i(\xi, \eta)$  interpoliert.

Zur Berechnung der Verzerrungen werden Ableitungen des Verschiebungsfeldes im globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem benötigt. Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

mit der Jacobimatrix  $\mathbf{J}$ , somit auch

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} . \quad (1.79)$$

Einsetzen der Verschiebungsapproximation (1.77) in die kinematische Beziehung (1.10) liefert

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{n_{ke}} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n_{ke}} \mathbf{B}_i \mathbf{v}_i . \quad (1.80)$$

Für ein virtuelles Verzerrungsfeld gemäß Abschnitt 1.1.2 gilt

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{n_{ke}} \mathbf{B}_i \delta \mathbf{v}_i \quad (1.81)$$

mit den virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{v}_i$ .

---

<sup>8</sup>Vgl. z. B. Bathe [11], Wriggers [248], Zienkiewicz et al. [253] und Zienkiewicz und Taylor [252].

### Schwache Form des Gleichgewichts

Durch Einsetzen der virtuellen Verschiebungen und Verzerrungen aus (1.81) in das Prinzip der virtuellen Verrückungen (1.35) erhält man unter Anwendung des Hookeschen Gesetzes (1.21) und der Summe über alle Elemente gemäß (1.76)

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{v}_e^T \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{v}_e dA - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA - \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* ds \right\} = 0 \quad , \quad (1.82)$$

wobei  $\mathbf{E}$  für die Elastizitätsmatrix steht. Durch Gruppierung der Matrizen  $\mathbf{B}_i$  in  $\mathbf{B}$ , der Knotenverschiebungen  $\mathbf{v}_i$  in  $\mathbf{v}_e$  und der Formfunktionen  $N_i$  in  $\mathbf{N}$  wird dabei die Summation über die Knoten kompakter ausgedrückt.

### Berechnung der Elementgrößen und Lösung

Damit (1.82) für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{v}_e$  gilt, muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer verschwinden. Für jedes einzelne finite Element ergibt sich somit das effektive konstitutive Verhalten

$$\mathbf{K}_e \mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e \quad (1.83)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \quad (1.84)$$

und dem Elementlastvektor, bzw. den Elementknotenpunktlasten

$$\mathbf{p}_e = \int_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_{\partial A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* ds \quad . \quad (1.85)$$

Die elementweise Integration wird in der Regel numerisch mittels Integrationsformeln, z. B. nach Gauss, im  $\xi$ - $\eta$ -System auf dem Einheitsselement durchgeführt. Durch Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen und -lastvektoren unter Berücksichtigung gleicher Knoten für angrenzende Elemente erhält man ein lineares Gleichungssystem vom Typ

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{p} \quad (1.86)$$

mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , dem Knotenpunktverschiebungsvektor  $\mathbf{v}$  und dem Knotenpunktlastvektor  $\mathbf{p}$ . Die Lösung erfolgt nach Einarbeitung der kinematischen und dynamischen Randbedingungen. Die Spannungen können danach im Rahmen einer Rückrechnung mit

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{v}_e \quad (1.87)$$

elementweise ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass deren Näherungsgüte aufgrund der Differentiation in  $\mathbf{B}$  weniger gut ist als die der Verschiebungen.

## 1.4 Grundlagen der Bruchmechanik

In diesem Abschnitt werden, sofern für diese Arbeit relevant, die Grundlagen der Bruchmechanik dargestellt. Zuerst werden klassische Festigkeitshypothesen dargestellt, die überwiegend bei isotropen Werkstoffen zur Anwendung kommen. Danach wird auf die Festigkeit von Laminaten Bezug genommen und ein relevantes Versagenskriterium exemplarisch erläutert. Als Grundproblem vieler im Rahmen der Arbeit untersuchter Konfigurationen werden asymptotische Felder an Multimaterialkerben behandelt und für Risse in isotropem Material konkretisiert. Schließlich wird in die Denkweisen der linearen Bruchmechanik eingeführt, die zum Verständnis des in der Arbeit verwendeten hybriden Kriteriums wichtig sind. Für detailliertere Darstellungen, auch weiterer Gebiete wie der elastisch-plastischen Bruchmechanik, der Bruchdynamik sowie der Schädigungsmechanik sei auf die einschlägige Fachliteratur <sup>9</sup> verwiesen.

### 1.4.1 Klassische Festigkeitshypothesen

Im Laufe der Entwicklung der Festkörpermechanik wurden verschiedene klassische Bruch- und Versagenshypothesen entwickelt, die vergleichsweise einfach, aber immer noch von erheblicher praktischer Bedeutung sind. Sie haben die allgemeine Form

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad , \quad \text{bzw.} \quad G(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad (1.88)$$

und werden oft in Hauptspannungen oder Hauptdehnungen formuliert:

- *Hauptspannungshypothese* (Rankine, Lamé, Navier): Versagen wird postuliert, wenn die größte Hauptnormalspannung die Zugfestigkeit oder die kleinste Hauptnormalspannung die Druckfestigkeit erreicht. Die Hypothese ist am besten zur Beschreibung spröden Werkstoffverhaltens geeignet, vernachlässigt aber die Interaktion der Hauptspannungen und ist deshalb nur eingeschränkt anwendbar.
- *Hauptdehnungshypothese* (de Saint-Venant, Bach): Versagen wird postuliert, wenn die größte Hauptdehnung einen kritischen Wert annimmt. Die Hypothese findet keine breite Anwendung, da sie experimentellen Erfahrungen, insbesondere bei einachsiger Druckbelastung, widerspricht.
- *Formänderungsenergiehypothese* (Beltrami): Versagen wird postuliert, wenn die Formänderungsenergiegedichte einen kritischen Wert erreicht. Dies würde jedoch bedeuten, dass ein hydrostatischer Druckzustand die gleiche Bruchgefahr für ein Material bedeutet wie ein hydrostatischer Zugzustand, was den experimentellen Erfahrungen widerspricht.

---

<sup>9</sup>Vgl. z. B. Anderson [5], Broek [23, 24], Gdoutos [55], Gross und Seelig [67], Hahn [70], Hertzberg [91], Kanninen und Popelar [98], Kienzler [101], Kuna [112], Lemaitre und Desmorat [136] und Miannay [152].



- *Gestaltänderungsenergiehypothese* (von Mises): Versagen, bzw. plastisches Fließen wird postuliert, wenn die Gestaltänderungsenergiegedichte einen kritischen Wert erreicht. Die Hypothese liefert eine recht gute Beschreibung der Fließgrenze vieler Metalle.
- *Fließbedingung von Tresca*: Versagen, bzw. plastisches Fließen wird postuliert, wenn die größte Hauptschubspannung einen kritischen Wert annimmt. Die Aussage und deren Qualität ähneln der Gestaltänderungsenergiehypothese, jedoch ist die Versagensfläche nicht glatt und daher numerisch schwieriger auszuwerten.
- *Coulomb-Mohr-Hypothese*: Versagen bzw. Abgleiten des Materials auf einer Schnittfläche wird postuliert, wenn der Betrag der Schubspannungen einen linear mit den Normalspannung zusammenhängenden, bzw. experimentell ermittelten Wert erreicht. Die Hypothese findet aufgrund ihrer guten Aussagequalität für geologische und granulare Materialien breite Anwendung. Weiterhin bildet sie die Grundlage neuerer Zwischenfaserbruchkriterien für Faserverbundwerkstoffe.
- *Drucker-Prager-Hypothese*: Versagen wird postuliert, wenn die Oktaederschubspannungen einen linear mit den Oktaedernormalspannungen zusammenhängenden Wert erreichen. Die Hypothese ist in ihrer Aussage ähnlich der Coulomb-Mohr-Hypothese und findet auch bei geologischen und granularen Materialien Anwendung.

Wie in der Einführung schon erläutert, eignen sich die Kriterien vorwiegend für schwach inhomogene Spannungszustände und sind aufgrund ihrer Formulierung (1.88) zur direkten Auswertung an Singularitäten ungeeignet. Auch eignen sich die oben genannten Kriterien weniger für anisotrope Materialien, weil sie deren komplexem Versagensverhalten nicht hinreichend gerecht werden.

### 1.4.2 Laminatfestigkeit

Festigkeitshypothesen für Lamine aus anisotropen Einzelschichten müssen der Anisotropie in Aufbau, Steifigkeit und Festigkeit und den daraus resultierenden Versagensmechanismen Rechnung tragen. Typische Versagensarten für Lamine sind zum Beispiel:

- Faserbruch,
- Matrixbruch,
- Faser-Matrix-Ablösung,
- Delamination.

Die ersten drei Mechanismen spielen sich in der Lamineinzelschicht ab und werden durch eine wichtige Klasse von Laminatversagenkriterien beschrieben, aus der hier das

Tsai-Wu-Versagenskriterium exemplarisch vorgestellt werden soll. Die Kriterien sind im dreidimensionalen Spannungsraum der intralaminaren Spannungen im Rahmen der klassischen Laminattheorie formuliert. Da die interlaminaren Spannungen ins Laminatinnere schnell abklingen, werden sie nicht berücksichtigt. Zur Charakterisierung der Festigkeit einer unidirektional verstärkten Einzelschicht werden fünf Kennwerte herangezogen, die durch Versuche ermittelt werden:

- die longitudinale Zugfestigkeit  $R_{\parallel}^+$ ,
- die longitudinale Druckfestigkeit  $R_{\parallel}^-$ ,
- die transversale Zugfestigkeit  $R_{\perp}^+$ ,
- die transversale Druckfestigkeit  $R_{\perp}^-$ ,
- die Scherfestigkeit  $R_{\perp\parallel}$ .

Zur Berechnung einfacher Belastungszustände könnten die Kennwerte auch direkt herangezogen werden, was der in der Praxis auftretenden überlagerten Beanspruchung, bei der die Spannungskomponenten miteinander wechselwirken, nicht gerecht wird. Im Rahmen der Versagenshypothese nach Tsai-Wu wird hierzu eine Versagensfläche im Spannungsraum durch eine quadratische Funktion der Tensorkomponenten  $\sigma_i$  beschrieben:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1 \quad , \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 6 \quad . \quad (1.89)$$

Aufgrund der Invarianz bei Vorzeichenumkehr von  $\sigma_6 = \tau_{12}$  muss  $F_{16} = F_{26} = F_6 = 0$  gelten, womit noch sechs freie Koeffizienten verbleiben:

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 = 1 \quad . \quad (1.90)$$

Aus Überlegungen für fünf elementare, durch die Festigkeiten charakterisierte Spannungszustände

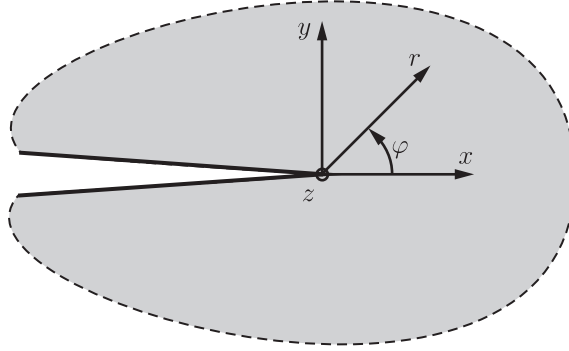
$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} R_{\parallel}^+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\sigma_i] = \begin{bmatrix} -R_{\parallel}^- \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\sigma_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{\perp}^+ \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\sigma_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_{\perp}^- \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\sigma_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{\perp\parallel} \end{bmatrix}$$

lassen sich fünf Koeffizienten bestimmen:

$$F_{11} = \frac{1}{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^-} \quad , \quad F_1 = \frac{1}{R_{\parallel}^+} - \frac{1}{R_{\parallel}^-} \quad , \quad F_{22} = \frac{1}{R_{\perp}^+ R_{\perp}^-} \quad , \quad F_2 = \frac{1}{R_{\perp}^+} - \frac{1}{R_{\perp}^-} \quad , \quad F_{66} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}^2} \quad .$$

Der verbleibende Koeffizient  $F_{12}$  wird entweder aus einem biaxialen Test ermittelt oder näherungsweise gleich

$$F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^- R_{\perp}^+ R_{\perp}^-}}$$



**Bild 1.7:** Risspitze mit Koordinatensystemen.

gesetzt. Somit erhält man die folgende Gleichung für das Tsai-Wu-Versagenskriterium

$$\frac{\sigma_1^2}{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^-} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^- R_{\perp}^+ R_{\perp}^-}} + \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^+ R_{\perp}^-} + \frac{\tau_{12}^2}{R_{\perp \parallel}^2} + \sigma_1 \left( \frac{1}{R_{\parallel}^+} - \frac{1}{R_{\parallel}^-} \right) + \sigma_2 \left( \frac{1}{R_{\perp}^+} - \frac{1}{R_{\perp}^-} \right) = 1 \quad (1.91)$$

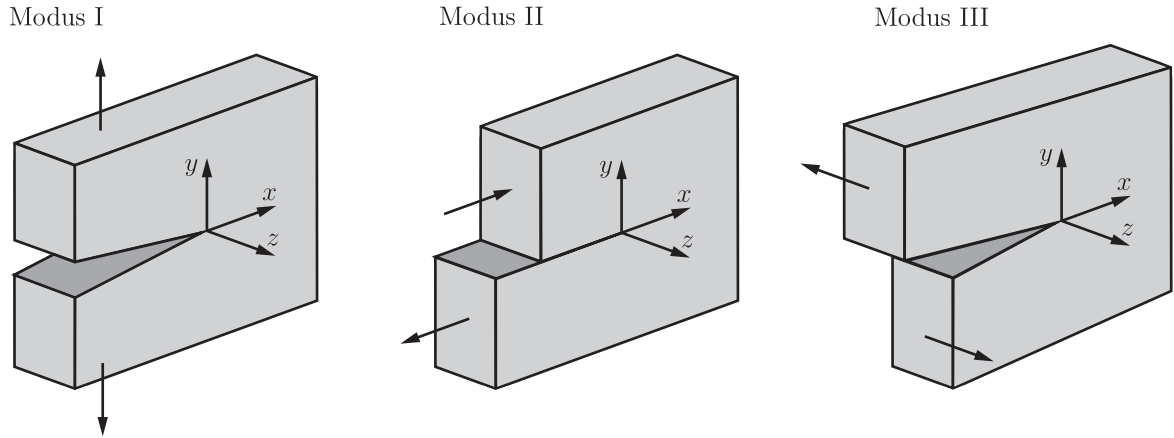
Eine Beurteilung der Festigkeit eines Laminats erfordert die Auswertung des Kriteriums (1.91) in jeder Einzelschicht. Das Konzept der Versagensdefinition für das Gesamtlaminat bis zum Versagen der ersten Einzelschicht wird als „first ply failure (FPF)“ bezeichnet. Andere Konzepte berücksichtigen noch weitere Tragreserven des geschädigten Verbundes bis zum Versagen der letzten Einzelschicht („last ply failure (LPF)“). Das vorgestellte Kriterium hat wie auch andere Versagenskriterien<sup>10</sup> den Vorteil der Berücksichtigung unterschiedlicher Zug- und Druckfestigkeiten sowie der Wechselwirkung verschiedener Spannungen, ermöglicht jedoch keine Unterscheidung der Versagensart. Insbesondere zur verbesserten Beschreibung des Zwischenfaserbruchs wurden neuere Kriterien<sup>11</sup> formuliert, die die Wechselwirkung der Spannungen besser berücksichtigen.

### 1.4.3 Asymptotische Felder an Rissen und Multimaterialkerben

Nachfolgend werden die asymptotischen Felder an Rissen, zunächst in homogenem isotropem Material, hergeleitet und dann die Erweiterung auf Multimaterialkerbkonfigurationen diskutiert. Dabei wird auf das in Bild 1.7 dargestellte Koordinatensystem Bezug genommen. Hinsichtlich der Deformation eines Risses werden drei Grundfälle der Rissöffnungsarten, wie in Bild 1.8 dargestellt, unterschieden. Für Modus I erfolgt die Rissöffnung senkrecht zur  $x, z$ -Ebene. Die Rissöffnung für Modus II erfolgt durch eine Relativverschiebung der Rissflanken normal zur Rissfront, während für Modus III die Rissflanken in der  $x, z$ -Ebene tangential zur Rissfront verschoben werden.

<sup>10</sup>Z. B. das klassische Versagenskriterium von Puck, das Tsai-Hill-Kriterium oder das Kriterium von Hashin, vgl. z. B. Becker und Gross [15].

<sup>11</sup> Z. B. das Pucksche Wirkebenenkriterium, vgl. Puck und Schürmann [189, 190] oder das Versagensmodus-Konzept von Cuntze, vgl. Cuntze [39, 40] sowie Cuntze und Freund [41].

**Bild 1.8:** Rissöffnungsarten.

### Riss in homogenem isotropem Material unter nichtebener Beanspruchung

Zur Berechnung der Feldgrößen unter Modus III-Belastung wird ein Riss im longitudinalen Schubspannungszustand betrachtet, wofür die Gleichungen (1.66) gelten. Als Lösungsansatz wird

$$\Omega(z) = Az^\lambda \quad (1.92)$$

gewählt, wobei  $\lambda$  als reell angenommen wird und  $A$  eine komplexe Konstante ist. Als Randbedingung wird das Verschwinden des Spannungsvektors an den Rissflanken gefordert, im longitudinalen Schubspannungszustand also  $\tau_{yz}(\pm\pi) = 0$ . Der Ansatz (1.92) liefert zusammen mit den Grundgleichungen und  $z = re^{i\varphi}$ :

$$2i\tau_{yz} = \overline{\Omega'}(z) - \bar{\Omega}(z) = \bar{A}\lambda r^{\lambda-1}e^{-i(\lambda-1)\varphi} - A\lambda r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\varphi} \quad (1.93)$$

Die Auswertung der Bedingungen für beide Ränder liefert ein lineares Gleichungssystem für  $A$  und  $\bar{A}$ :

$$\begin{aligned} -Ae^{i\lambda\pi} + \bar{A}e^{-i\lambda\pi} &= 0 \quad , \\ -Ae^{-i\lambda\pi} + \bar{A}e^{i\lambda\pi} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.94)$$

Für die Existenz einer nichttrivialen Lösung muss die Koeffizientendeterminante verschwinden, woraus die Eigenwertgleichung

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \quad (1.95)$$

folgt. Für eine beschränkte Formänderungsenergie und für nichtsinguläre Verschiebungen an der Risspitze wird  $\lambda > 0$  gefordert, woraus die Eigenwerte

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.96)$$

folgen. Durch Einsetzen von (1.96) in (1.94) lässt sich eine Gleichung für die komplexen Konstanten  $A_n$  gewinnen. Somit lautet die asymptotische Entwicklung der Feldgrößen an

der Rissspitze mit  $\alpha = x, y$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha z} &= r^{-1/2}\hat{\tau}_{\alpha z}^{(1)}(\varphi) + \hat{\tau}_{\alpha z}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2}\hat{\tau}_{\alpha z}^{(3)}(\varphi) + \dots, \\ w - w_0 &= r^{1/2}\hat{w}^{(1)}(\varphi) + r\hat{w}^{(2)}(\varphi) + r^{3/2}\hat{w}^{(3)}(\varphi) + \dots,\end{aligned}\quad (1.97)$$

wobei  $w_0$  für eine spannungsfreie Starrkörperverschiebung steht. Dabei sind die Funktionen  $\hat{\tau}_{\alpha z}^{(n)}(\varphi)$  und  $\hat{w}^{(n)}(\varphi)$  einander zugeordnet, bis auf einen reellen Faktor bestimmt und können mit Hilfe von (1.66) ermittelt werden. Für den ersten Eigenwert stellt sich das Spannungs- und Verschiebungsfeld gemäß

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}, \quad w = \frac{2K_{\text{III}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (1.98)$$

dar, wobei  $K_{\text{III}}$  für den Spannungsintensitätsfaktor der Modus III-Rissöffnung steht. Er hängt von der Form des Körpers und seiner Belastung ab.

### Riss in homogenem isotropem Material unter ebener Beanspruchung

Die Berechnung für den ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand geschieht analog. Dabei werden die beiden komplexen Potentiale

$$\Phi(z) = Az^\lambda, \quad \Psi(z) = Bz^\lambda \quad (1.99)$$

verwendet, wobei  $A$  und  $B$  komplexe Konstanten sind und  $\lambda$  als reell und positiv vorausgesetzt wird. Wegen der unbelasteten Rissflanken muss  $\sigma_y(\pm\pi) = \tau_{xy}(\pm\pi) = 0$  als Randbedingung gelten. Zusammen mit dem Ansatz (1.99) liefern die Grundgleichungen (1.73) die Beziehung

$$\begin{aligned}\sigma_y + i\tau_{xy} &= \Phi'(z) + \bar{\Phi}'(z) + \bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z) = \\ &= A\lambda r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\varphi} + \bar{A}\lambda r^{\lambda-1}e^{-i(\lambda-1)\varphi} + A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-3)\varphi} + B\lambda r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\varphi},\end{aligned}\quad (1.100)$$

woraus vier Gleichungen für die unbekannten Konstanten folgen:

$$\begin{aligned}A\lambda e^{i\lambda\pi} &+ \bar{A}e^{-i\lambda\pi} &+ B e^{i\lambda\pi} &= 0, \\ A e^{i\lambda\pi} &+ \bar{A}\lambda e^{-i\lambda\pi} &+ \bar{B} e^{-i\lambda\pi} &= 0, \\ A\lambda e^{-i\lambda\pi} &+ \bar{A}e^{i\lambda\pi} &+ B e^{-i\lambda\pi} &= 0, \\ A e^{-i\lambda\pi} &+ \bar{A}\lambda e^{i\lambda\pi} &+ \bar{B} e^{i\lambda\pi} &= 0.\end{aligned}\quad (1.101)$$

Für die Existenz nichttrivialer Lösungen muss die Koeffizientendeterminante verschwinden, woraus die Eigenwertgleichung

$$\cos 4\lambda\pi = 1 \quad (1.102)$$

folgt. Damit die Formänderungsenergie beschränkt bleibt und für nichtsinguläre Verschiebungen an der Rissspitze, wird  $\lambda > 0$  gefordert, woraus die Eigenwerte

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.103)$$

folgen. Einsetzen von (1.103) in (1.101) liefert eine Gleichung zur Bestimmung der komplexen Konstanten  $A_n$  und  $B_n$ . Die asymptotische Entwicklung der Feldgrößen an der Risspitze lautet in diesem Fall mit  $\alpha, \beta = x, y$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= r^{-1/2} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(1)}(\varphi) + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(3)}(\varphi) + \dots, \\ u_\alpha - u_{\alpha 0} &= r^{1/2} \hat{u}_\alpha^{(1)}(\varphi) + r \hat{u}_\alpha^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \hat{u}_\alpha^{(3)}(\varphi) + \dots,\end{aligned}\quad (1.104)$$

wobei  $u_{\alpha 0}$  für spannungsfreie Starrkörperverschiebungen stehen. Auch hier sind die Funktionen  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(n)}(\varphi)$  und  $\hat{u}_\alpha^{(n)}(\varphi)$  einander zugeordnet und bis auf einen reellen Faktor bestimmt. Sie können über (1.73) ermittelt werden. Die Felder können in einen symmetrischen Modus I-Anteil und in einen antisymmetrischen Modus II-Anteil aufgespalten werden. Für den ersten Eigenwert lauten die Spannungs- und Verschiebungsfelder für Modus I:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \varphi) \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}\quad (1.105)$$

und für Modus II:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} (2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}) \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} (1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} (\kappa + 2 + \cos \varphi) \\ \cos \frac{\varphi}{2} (\kappa - 2 + \cos \varphi) \end{bmatrix},\quad (1.106)$$

mit

$$\sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{im EVZ} \\ 0 & \text{im ESZ} \end{cases} \quad (1.107)$$

Die Materialkonstante  $\kappa$  ist gemäß (1.74) definiert. Auch hier wird die Stärke der Felder durch die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  charakterisiert, die von der Form und Belastung des Körpers abhängen.

Die für ebene Probleme hergeleiteten Felder sind auch für räumliche Rissprobleme von Bedeutung. Durch Untersuchungen von Sneddon und Lowengrub [220] an elliptischen Innenrissen und von Hartranft und Sih [75, 76] an durchgehenden Rissen in Scheiben konnte gezeigt werden, dass lokal die gleichen Nahfelder zu den jeweiligen Moden vorliegen wie bei ebenen Problemen<sup>12</sup>. Somit wird der Spannungszustand an einer Rissfront eindeutig durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert. Ausnahmen sind singuläre Punkte an Knicken oder beim Auftreffen der Rissfront auf eine freie Oberfläche. Hier können Singularitäten vorliegen, die nicht vom Typ  $r^{-1/2}$  sind.

<sup>12</sup>Mit EVZ-Verschiebungsfeldern bei Modus I/II.

## Erweiterung auf Multimaterialkerbkonfigurationen

Die oben beschriebenen asymptotischen Felder gelten in erweiterter Form auch für Spitzkerben, sogar in Multimaterialkonfigurationen. Es treten hier in der Regel führende Terme vom Typ<sup>13</sup>

$$\sigma_{ij} \sim \begin{cases} \tilde{r}^{\lambda-1} & \text{mit reellem } \lambda \\ \tilde{r}^{\operatorname{Re}(\lambda)-1} \begin{cases} \sin(\operatorname{Im}(\lambda) \ln \tilde{r}) \\ \cos(\operatorname{Im}(\lambda) \ln \tilde{r}) \end{cases} & \text{mit komplexem } \lambda \end{cases} \quad (1.108)$$

$$\begin{cases} \tilde{r}^{\lambda-1} \ln \tilde{r} & \text{mit reellem } \lambda \\ \tilde{r}^{\operatorname{Re}(\lambda)-1} \ln \tilde{r} \begin{cases} \sin(\operatorname{Im}(\lambda) \ln \tilde{r}) \\ \cos(\operatorname{Im}(\lambda) \ln \tilde{r}) \end{cases} & \text{mit komplexem } \lambda \end{cases}$$

auf, durch die die Singularität charakterisiert wird. Dabei steht  $\tilde{r} = \frac{r}{L}$  für die mit einer charakteristischen Länge  $L$  normierte Radialkoordinate. Wie in der Einleitung besprochen, können auch verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren angegeben werden, die jedoch dann abhängig vom Kerbwinkel und den Materialkonstanten sind. Bezüglich der oszillierenden Singularitäten sei angemerkt, dass die Oszillationen auf einen sehr kleinen Bereich um den Kerbgrund beschränkt und für Materialkombinationen gängiger Probleme vernachlässigbar sind<sup>14</sup>. Um diese numerisch im Rahmen von Finite-Elemente-Analysen zu erfassen ist eine extrem feine und in der Regel impraktikable Diskretisierung erforderlich.

Bei den von Ma und Hour [142] sowie von Liu und Chue [140] betrachteten Kerbproblemen im longitudinalen Schubspannungszustand wurden für diverse Randbedingungen nur gewöhnliche Singularitäten vom Typ  $r^{\lambda-1}$  mit reellem  $\lambda$  festgestellt, sogar für Bimaterialprobleme mit anisotropen Materialien. Für bestimmte Konfigurationen wurden auch Singularitäten gefunden, die stärker als die  $r^{-1/2}$ -Rissspitzensingularität sind.

Homogene Spitzkerbkonfigurationen mit isotropem Materialverhalten wurden im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand z. B. von Williams [247] untersucht. Für freie Ränder ist  $\lambda$  in der Regel reell und abhängig vom Kerbwinkel und nicht stärker als die  $r^{-1/2}$ -Singularität. Beim einseitig eingespannten Rand treten jedoch auch stärkere Singularitäten auf. Bedingungen für potenz-logarithmische Singularitäten mit reellem  $\lambda$  wurden von Sinclair [219] angegeben.

Bimaterialkerbkonfigurationen mit isotropem Materialverhalten wurden z. B. von Bogy [17–19], Theocaris [230] und Müller et al. [162, 163] untersucht. Dabei treten komplexe Werte für  $\lambda$  mit den daraus folgenden oszillierenden Singularitäten auf. Bedingungen für logarithmische Singularitäten wurden insbesondere von Dempsey und Sinclair [43, 44] diskutiert. Bei Anwendungsproblemen treten zusätzlich zu den mechanischen Lasten oft

<sup>13</sup>Vgl. Dempsey und Sinclair [43, 44], wobei die Existenz von logarithmischen Termen höherer Ordnung nicht ausgeschlossen wird.

<sup>14</sup>Vgl. Gross und Seelig [67], S. 128.

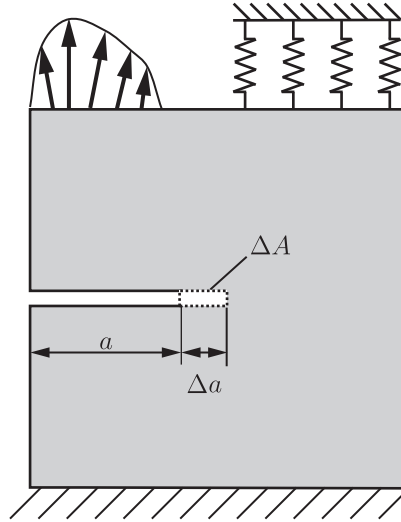


Bild 1.9: Körper mit Riss.

auch noch thermische Lasten auf. Der Fall einer konstanten Temperaturlast wurde von Munz und Yang [166] diskutiert.

Für anisotropes Materialverhalten können im Allgemeinen auch Kopplungen zwischen allen drei Moden auftreten. Dies führt auf ein verallgemeinertes Problem des in Abschnitt 1.2.2 diskutierten dreidimensionalen Laminat-Randeffekts. Eine näherungsweise Lösung durch Kopplung des Modells für den ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand mit dem Modell für den nichtebenen Schubspannungszustand wurde von Chue und Liu [33] für homogene Kerben, bzw. von Chue et al. [32] für Bimaterialkonfigurationen vorgeschlagen.

#### 1.4.4 Lineare Bruchmechanik

##### Energiebilanz beim Rissfortschritt

Betrachtet wird, wie in Bild 1.9 dargestellt, ein rissbehafteter elastischer Körper. Für die äußeren Lasten wird die Existenz eines Potentials  $\Pi^a$  vorausgesetzt und das innere Potential wird mit  $\Pi^i$  bezeichnet. Bei einem Rissfortschritt um  $\Delta A$  geht das System aus der Gleichgewichtslage 1 in die Gleichgewichtslage 2 über. Um den Übergang zu modellieren, wird der Körper im Zustand 1 an der Fläche  $\Delta A$  aufgeschnitten und die an der Schnittfläche wirkenden Spannungen werden als äußere Lasten aufgetragen. Diese werden quasistatisch auf Null reduziert bis der Zustand 2 erreicht ist. Dabei verrichten die Lasten eine Arbeit  $\Delta W_\sigma \leq 0$ . Außerdem verrichten die Kräfte auf  $\partial V_t$  die Arbeit  $W_{12}^a = -\Delta \Pi^a$ . Anwendung des Energiesatzes (1.33) liefert

$$\Delta \Pi^i = W_{12}^a + \Delta W_\sigma = -\Delta \Pi^a + \Delta W_\sigma \quad , \quad (1.109)$$



bzw. mit dem Gesamtpotential  $\Pi = \Pi^i + \Pi^a$

$$\Delta\Pi = \Delta W_\sigma \leq 0 \quad . \quad (1.110)$$

Die durch Abnahme der mechanischen Energie des Systems freigesetzte Energie steht für den Bruchprozess zur Verfügung.

Die auf einen infinitesimalen Rissfortschritt  $dA$  bezogene freigesetzte Energie  $-d\Pi$  wird Energiefreisetzungsrate genannt:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} \quad . \quad (1.111)$$

Im Falle linearer Elastizität besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Energiefreisetzungsrate und Spannungsintensitätsfaktoren, dessen Herleitung nachfolgend skizziert werden soll. Dazu wird das ebene Problem eines Körpers mit Riss betrachtet, der sich aus dem Zustand 1 um  $\Delta a$  auf den Zustand 2 verlängert. Wieder wird der Körper als um  $\Delta a$  geschnitten modelliert, wobei die Schnittlasten vom Zustand 1 auf den Zustand 2 quasistatisch auf Null reduziert werden. Die dabei von den Schnittkräften verrichtete Arbeit, bzw. die Potentialdifferenz kann nach Moden getrennt pro Einheitsdicke über die Risschließintegrale

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_{\text{I}} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \sigma_y^{(1)}(x) (v^{(2)+}(x) - v^{(2)-}(x)) dx \quad , \\ \Delta\Pi_{\text{II}} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \tau_{xy}^{(1)}(x) (u^{(2)+}(x) - u^{(2)-}(x)) dx \quad , \\ \Delta\Pi_{\text{III}} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \tau_{yz}^{(1)}(x) (w^{(2)+}(x) - w^{(2)-}(x)) dx \end{aligned} \quad (1.112)$$

berechnet werden, wobei „+“ und „−“ das bezüglich der  $y$ -Achse positive und negative Rissufer bezeichnen. Durch Einsetzen der entsprechenden durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisierten asymptotischen Felder erhält man nach Division durch  $\Delta a$  und Durchführung des Grenzübergangs  $\Delta a \rightarrow 0$  für reine Moden

$$\mathcal{G}_{\text{I}} = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_{\text{I}}^2 \quad , \quad \mathcal{G}_{\text{II}} = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_{\text{II}}^2 \quad , \quad \mathcal{G}_{\text{III}} = \frac{1}{2\mu} K_{\text{III}}^2 \quad (1.113)$$

und für den allgemeinen räumlichen Fall

$$\mathcal{G} = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{\text{III}}^2 \quad . \quad (1.114)$$

Dabei wird  $\kappa$  gemäß (1.74) berechnet.

Virtuelle Risschließintegrale werden in der Methode von Rybicki und Kanninen [207]<sup>15</sup> in diskretisierter Form ausgewertet, um für lineare Probleme Energiefreisetzungsraten bzw. Spannungsintensitätsfaktoren numerisch zu ermitteln. Für andere Methoden zu deren Bestimmung sei auf die zitierte Fachliteratur verwiesen.

---

<sup>15</sup>Siehe auch Krueger [107].

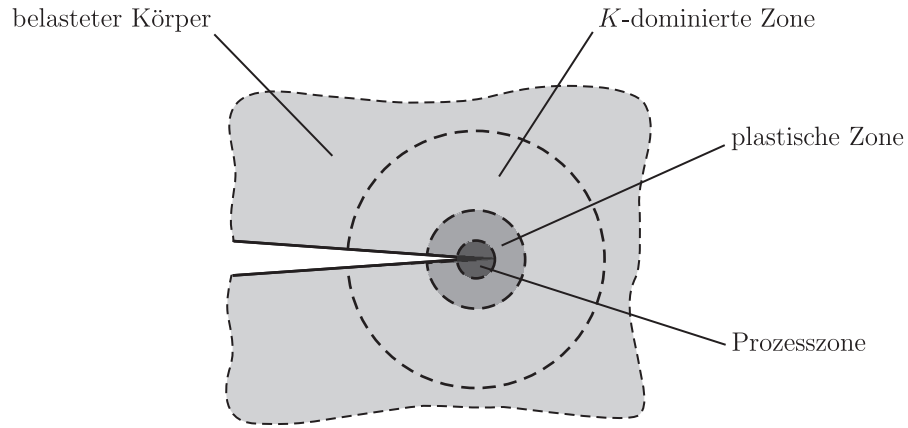


Bild 1.10: Zonen um die Risspitze.

### Bruchkriterien

Zur Bewertung der Kritikalität von Rissen wurden vielfältige Kriterien formuliert, von denen hier einige vorgestellt werden sollen. Einen möglichen Zugang stellt die Auswertung der Energiebilanz beim Rissfortschritt dar. Die Anwendung des Energiesatzes (1.33) auf den infinitesimalen quasistatischen Rissfortschritt in einem elastischen System, bei dem die äußeren Lasten ein Potential besitzen, liefert

$$d\Pi + d\Gamma = 0 \quad . \quad (1.115)$$

Dabei bezeichnet  $\Pi$  das Gesamtpotential und in  $\Gamma$  sind die am Bruchprozess beteiligten Energieformen zusammengefasst, z. B. die Oberflächenenergie oder die Energie für plastische Deformationen an der Risspitze. Aufgrund der Irreversibilität des Bruchprozesses muss  $d\Gamma \geq 0$  gelten. Die Division durch  $dA$  liefert mit (1.111) das energetische Bruchkriterium

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{d\Gamma}{dA} \quad , \quad \text{bzw. } \mathcal{G} = \mathcal{G}_c \quad . \quad (1.116)$$

Dabei wird  $\mathcal{G}_c$  als Risswiderstand oder auch als Bruchzähigkeit bezeichnet.

Neben dem energetischen Bruchkriterium existieren noch weitere Kriterien, wovon das auf den Spannungsintensitätsfaktoren basierende sogenannte  $K$ -Konzept einen wichtigen Zugang bildet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Zustände an der Risspitze eindeutig durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert werden. Die Vorgänge in der Prozesszone mit Bindungslösung und Schaffung neuer Oberflächen sowie in der plastischen Zone mit inelastischen Deformationen können jedoch nicht mehr durch die lineare Elastizitätstheorie beschrieben werden. Grundlage der Argumentation ist, dass die Zonen in der Regel, wie in Bild 1.10 dargestellt, von einem  $K$ -dominierten Feld umgeben sind, welches die eingeschlossenen Zonen kontrolliert. Somit lassen sich für reine Belastungen Bruchkriterien der Form

$$K_I = K_{Ic} \quad , \quad K_{II} = K_{IIc} \quad , \quad K_{III} = K_{IIIc} \quad (1.117)$$

formulieren. Die Größen  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$  und  $K_{IIIc}$  werden Bruchzähigkeiten genannt und in genormten Experimenten bestimmt.

Außer den beiden genannten Konzepten wurden noch weitere Bruchkriterien formuliert. Exemplarisch sei hier auf das insbesondere in der elastisch-plastischen Bruchmechanik als Kriterium verwendete  $J$ -Integral<sup>16</sup> verwiesen. Im Rahmen der linearen Bruchmechanik sind jedoch alle drei genannten Konzepte zueinander äquivalent.

Die hier beschriebenen Konzepte gelten strenggenommen nur bei reinen Beanspruchungen. Zur Behandlung von Problemen mit gemischter Beanspruchung müssen weitere Überlegungen angestellt werden, die dann Kriterien der Form

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0 \quad (1.118)$$

liefern, wozu auf die genannte Fachliteratur verwiesen wird.

Abschließend soll noch kurz auf sogenannte Constrainteffekte eingegangen werden. Insbesondere bei Bruchvorgängen mit einem signifikanten Anteil plastischer Deformationen an der Riss Spitze wird eine Abhängigkeit der effektiven Bruchzähigkeit vom Deformationszustand beobachtet. Eine starke Verformungsbehinderung an der Riss Spitze<sup>17</sup>, die mit einer Mehrachsigkeit der Spannungen einhergeht, führt zu einer Erniedrigung der effektiven Bruchzähigkeit. Deshalb kommt es bei bruchmechanischen Versuchen an Proben ohne Seitenkerben zu einer ausgeprägten Abhängigkeit der effektiven Bruchzähigkeit von der Probendicke<sup>18</sup>. Außerdem ändert sich der Bruchmodus von einem überwiegenden Normalspannungsbruch in dicken Proben mit annähernd ebenem Verzerrungszustand zu einem Scherbruch in dünnen Proben mit annähernd ebenem Spannungszustand. Neben diesem als Dickenconstraint bezeichnetem Effekt treten auch ebene Constrainteffekte auf. Wenn die Zustände an der Riss Spitze nicht mehr ausreichend durch einen Parameter charakterisiert werden können, wird die effektive Bruchzähigkeit abhängig von Geometrie und Belastung<sup>19</sup>. Eine Möglichkeit, Constrainteffekte zu charakterisieren, besteht in der Verwendung sogenannter sekundärer Bruchparameter zusätzlich zum  $K$ -Faktor bzw. zum  $J$ -Integral, die auf höheren Termen der asymptotischen Riss Spitzenfelder beruhen<sup>20</sup>. Zur physikalischen Erklärung sind jedoch andere Zugänge erforderlich, wozu exemplarisch auf die Tagungsbände von Hackett et al. [69] sowie von Kirk und Bakker [105] verwiesen wird.

---

<sup>16</sup>Vgl. z. B. Rice [203].

<sup>17</sup>Engl. „constraint“.

<sup>18</sup>Vgl. z. B. Anderson [5], S. 72 ff.

<sup>19</sup>Vgl. z. B. a. a. O., S. 133 ff.

<sup>20</sup>Vgl. z. B. Du und Hancock [45], O'Dowd und Shih [177], Chao et al. [30] sowie Hebel et al. [86].

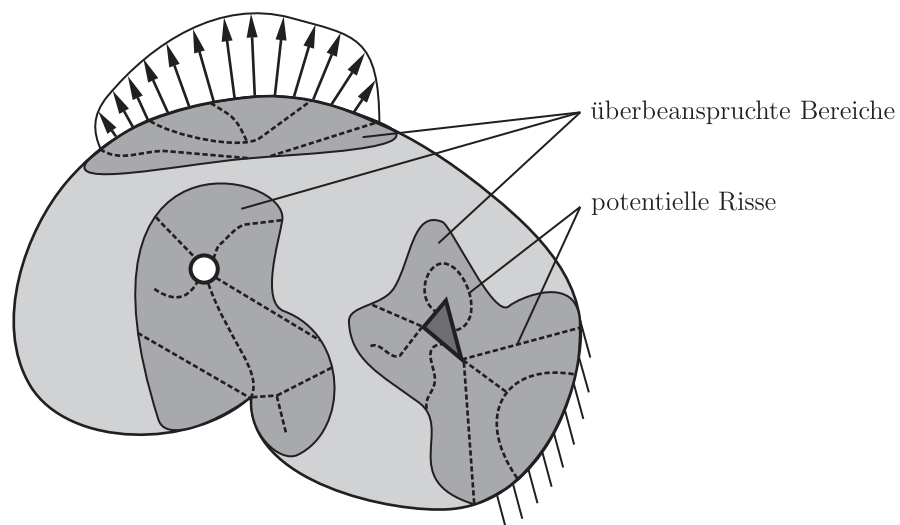
# Kapitel 2

## Hybrides Versagensmodell

In diesem Kapitel wird das in der Arbeit verwendete hybride Versagensmodell vorgestellt. Nach einer einführenden Diskussion des Modells folgen neue und bekannte asymptotische Formulierungen sowie eine neue direkte numerische Formulierung. Abschließend wird das Optimierungsproblem für die Bruchlast diskutiert und auf die Implementierung eingegangen. Das Kapitel basiert auf den Arbeiten von Hebel und Becker [79, 81] sowie von Hebel et al. [85].

### 2.1 Bruchkriterium

Grundlegend für das hybride Versagensmodell nach Leguillon [124, 125] ist, wie in Bild 2.1 dargestellt, die Annahme der spontanen Bildung kinematisch zulässiger Risse endlicher



**Bild 2.1:** Potentielle Versagenskonfigurationen gemäß dem hybriden Modell.

GröÙe  $\Delta A$  falls im Ausgangszustand<sup>1</sup> eine geeignet gewählte Vergleichsspannung  $F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right)$  an allen Punkten  $x_i$  über die gesamte virtuelle Bruchfläche  $\Omega_v$  die Festigkeit  $\sigma_c$  erreicht oder überschreitet und gemäß dem Energiesatz (1.33) die inkrementelle Energiebilanz bei der Rissbildung erfüllt ist:

$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) \geq \sigma_c \quad \forall \quad x_i \in \Omega_v \quad \wedge \quad \Delta E + \Delta K + \Delta \Gamma = \Delta W_t + \Delta W_f + \Delta W_Q \quad . \quad (2.1)$$

Dabei steht  $\Delta E$  für die Änderung der inneren und  $\Delta K$  für die Änderung der kinetischen Energie. Die Änderung der am Bruchprozess beteiligten Energieformen wird mit  $\Delta \Gamma$  und die Arbeitsinkremente der Randlasten und der Volumenkräfte werden mit  $\Delta W_t$  bzw. mit  $\Delta W_f$  bezeichnet. Mit  $\Delta W_Q$  wird die Änderung nichtmechanischer Energieformen bezeichnet. Aufgrund der Irreversibilität des Bruchprozesses gilt  $\Delta \Gamma \geq 0$ . Diese Formulierung schließt inelastische und dynamische Probleme ein, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden sollen. Es werden Probleme mit ruhenden Gleichgewichts-Ausgangszuständen betrachtet, woraus  $\Delta K \geq 0$  folgt. Weiterhin wird nur mechanischer Energietransport betrachtet. Somit gilt  $\Delta W_Q = 0$ . Für ein elastisches System bei dem die äußeren Lasten ein Potential besitzen wird die Änderung des Gesamtpotentials  $\Delta \Pi = \Delta E - \Delta W_t - \Delta W_f$  eingeführt. Im einfachsten Fall wird die Änderung der am Bruchprozess beteiligten Energieformen gemäß (1.116) durch die lineare Beziehung  $\Delta \Gamma = \mathcal{G}_c \Delta A$  beschrieben. Nach Einführung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}$  analog zur differentiellen Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  lautet das Bruchkriterium wie folgt:

$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) \geq \sigma_c \quad \forall \quad x_i \in \Omega_v \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta \Pi}{\Delta A} \geq \mathcal{G}_c \quad . \quad (2.2)$$

Dieses hybride Versagenskriterium ermöglicht eine universelle Beschreibung der Bildung von Rissen in beliebigen Konfigurationen unter Verwendung von den zwei fundamentalen Werkstoffkenngrößen  $\sigma_c$  und  $\mathcal{G}_c$ .

Für das Spannungsteilkriterium in (2.2) kann, abhängig vom betrachteten Material, jede geeignete Funktion  $F(\sigma_{ij})$  verwendet werden, z. B. Funktionen der maximalen Hauptnormalspannungen

$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) = \sigma_I \geq \sigma_c \quad (2.3)$$

oder der Normalspannungen senkrecht zum gebildeten Riss:

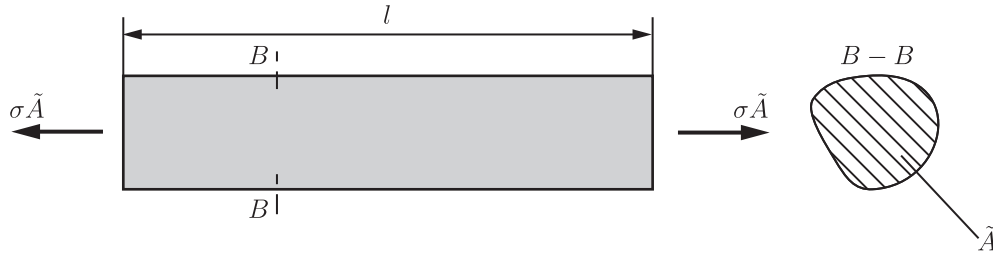
$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) = \sigma_\varphi \geq \sigma_c \quad . \quad (2.4)$$

Alternativ zu den obigen Ungleichungsformulierungen schlagen Cornetti et al. [36] ein Spannungsteilkriterium der Form

$$\Phi[\sigma_{ij}^{(1)}] = \frac{1}{\Delta A} \int_{\Omega_v} \sigma_\varphi \, d\bar{A} = \sigma_c \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Mit Index (1) bezeichnet.



**Bild 2.2:** Zugstab mit Querschnittsfläche  $\tilde{A}$ .

vor. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass alternativ zu reinen Funktionen bzw. Funktionalen der Spannungen auch Formulierungen in den Verzerrungen oder anderen Feldgrößen, wie beispielsweise bei den klassischen Versagenshypothesen (1.88), denkbar wären.

Die einzige Bedingung für die Geometrie der gebildeten Risse ist die kinematische Zulässigkeit der Konfiguration. Bei der konkreten Auswertung sind jedoch sinnvolle Einschränkungen unumgänglich. Prinzipiell sind auch Modifikationen des energetischen Teilkriteriums denkbar, z. B. um Einflüsse durch gemischte Beanspruchung oder durch Constrainteffekte besser abzubilden.

### 2.1.1 Grenzfälle

Das Modell ist auf beliebige reguläre und singuläre Probleme anwendbar. Besondere Grenzfälle sind homogene Spannungszustände und Risse.

#### Homogene Spannungszustände

Für den Grenzfall des homogenen Spannungszustandes wird Versagen im Wesentlichen durch das zur klassischen Festigkeitshypothese entartete Spannungsteilkriterium

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_c \quad (2.6)$$

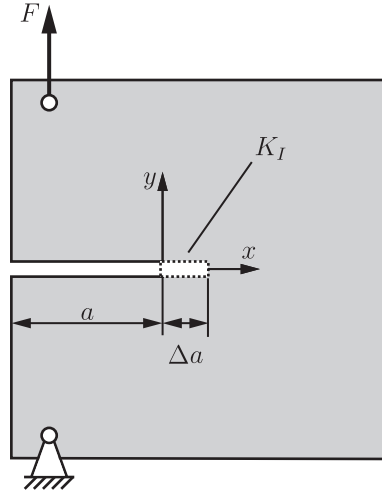
kontrolliert. Das energetische Teilkriterium muss jedoch auch erfüllt sein, was für den Bruch ein Mindestvolumen des Körpers erforderlich macht. Außerdem wird die Fragmentierung, wie für Einzelfaserrisse<sup>2</sup>, Matrixrisse<sup>3</sup> oder Dünnschichtversagen<sup>4</sup> gezeigt, maßgeblich durch das energetische Teilkriterium beeinflusst.

An dem in Bild 2.2 dargestellten Zugstab wird der Sinn des Spannungsteilkriteriums deutlich. Für den durch eine Last  $\sigma \tilde{A}$  belasteten isotropen linear-elastischen Stab mit der Länge  $l$ , der Querschnittsfläche  $\tilde{A}$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  liefert die Auswertung

<sup>2</sup>Vgl. z. B. Nairn und Liu [172].

<sup>3</sup>Vgl. z. B. Nairn [171].

<sup>4</sup>Vgl. z. B. Kim und Nairn [103].



**Bild 2.3:** Riss unter Modus I-Beanspruchung.

des hybriden Versagenskriteriums bei Annahme der Bildung eines transversalen Risses über den gesamten Querschnitt das folgende Ergebnis:

$$F(\sigma) \geq \sigma_c \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}} = \frac{\sigma^2 l}{2E} \geq \mathcal{G}_c . \quad (2.7)$$

Würde Versagen einzig durch das energetische Kriterium beschrieben, dann würde der Stab bei einer beliebig kleinen Last brechen, wenn er nur lang genug wäre. Weil dies jedoch der Erfahrung widerspricht, werden beide Teilkriterien zusammen betrachtet. Ungeklärt ist jedoch bei einem perfekten Stab die Frage des Ortes, an dem sich der Riss bildet. Theoretisch wäre auch, sofern die Energiebilanz es erlaubt, die Bildung mehrerer Fragmente möglich. In der Realität liegen jedoch im Stab kleine Defekte vor, so dass sich der entscheidende große Riss an der schwächsten Stelle bildet.

## Risse

Im Grenzfall des sich öffnenden, scharfen Risses, bei dem das Spannungsteilkriterium aus (2.2) für beliebige Lasten an der Risspitze erfüllt ist, wird Versagen allein durch das energetische Teilkriterium kontrolliert. Die Geometrie der neu gebildeten Risse wird jedoch durch das Spannungsteilkriterium beeinflusst, was auch die Beschreibung kurzer Risse, bei denen, wie im Einleitungskapitel gezeigt, die klassische Bruchmechanik nicht mehr anwendbar ist, ermöglicht. Zur Diskussion des Übergangs zu längeren Rissen wird ein ebener Riss in isotropem Material unter reiner Modus I-Beanspruchung, wie in Bild 2.3 dargestellt, für einen Rissfortschritt um  $\Delta a$  betrachtet. Für die gegebene reine Modus I-Beanspruchung entspricht das postulierte selbstähnliche Wachstum der Erfahrung. Für gemischte Beanspruchung muss auch ein Abknicken des Risses in Betracht gezogen werden, wie von Leguillon und Murer [128] gezeigt. Das energetische Teilkriterium aus (2.2) liefert

mit (1.112) die Beziehung

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_y^{(1)}(x) (v^{(2)+}(x) - v^{(2)-}(x)) dx \geq \mathcal{G}_c . \quad (2.8)$$

Für kleine Rissfortschrittsinkremente  $\Delta a$  können die asymptotischen Spannungen und Verschiebungen gemäß (1.105) verwendet werden. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}} &= \frac{\kappa + 1}{4\pi G} \frac{K_I(a)K_I(a + \Delta a)}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a}{x} - 1} dx \\ &= \frac{\kappa + 1}{8G} K_I(a)K_I(a + \Delta a) \geq \mathcal{G}_c . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wenn das Rissfortschrittsinkrement  $\Delta a$ , wie in vielen Anwendungsfällen, klein gegenüber dem existierenden Riss ist, liefert das energetische Teilkriterium annähernd das in Abschnitt 1.4.4 postulierte energetische Bruchkriterium

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} = \mathcal{G}_c \quad (2.10)$$

der klassischen Bruchmechanik mit  $\mathcal{G}$  als der differentiellen Energiefreisetzungsrate, die für  $\Delta a \rightarrow 0$ , wie in (1.113) angegeben,

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8G} K_I^2(a) \quad (2.11)$$

ergibt.

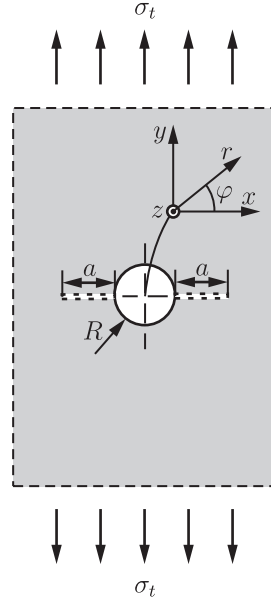
## 2.2 Asymptotische Formulierungen

Für einfache Konfigurationen lassen sich unter Verwendung entsprechender Entwicklungen für Spannungen und inkrementelle Energiefreisetzungsraten asymptotische Lösungen generieren, die einen schnellen und aufschlussreichen Zugang ermöglichen. Im Vorgriff auf Kapitel 3 werden nachfolgend zwei Formulierungen für geometrische Diskontinuitäten vorgestellt.

### 2.2.1 Kreisloch

Eine Scheibe mit Kreisloch unter einachsiger Zugbelastung ist eine reguläre Spannungskonzentration, die sich, wie von Hebel und Becker [79, 81] sowie von Leguillon et al. [132] gezeigt, gut zur Konstruktion asymptotischer Lösungen eignet. Für die in Bild 2.4 dargestellte, homogene, isotrope und symmetrische Konfiguration wird angenommen, dass sich im Versagensfall an den Stellen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$ , den Stellen maximaler Umfangsspannung  $\sigma_\varphi$ , voraussichtlich zwei horizontale, vom Lochrand ausgehende Risse bilden.





**Bild 2.4:** Scheibe mit Kreisloch unter Zugbelastung mit virtuellen Rissen.

Die Spannungen in der ungeschädigten unendlich ausgedehnten Scheibe unter Zuglast  $\sigma_t$  werden, wie schon 1898 von Kirsch [106] gezeigt, sowohl im ebenen Spannungszustand als auch im ebenen Verzerrungszustand durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \varphi) &= \frac{\sigma_t}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \left( 1 - 4 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right) \cos 2\varphi \right] , \\ \sigma_\varphi(r, \varphi) &= \frac{\sigma_t}{2} \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \left( 1 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right) \cos 2\varphi \right] , \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= \frac{\sigma_t}{2} \left[ 1 + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (2.12)$$

beschrieben.

Die Lösung für den Spannungsintensitätsfaktor hat die Form

$$K_I = Y \left( \frac{R+a}{R} \right) \sigma_t \sqrt{\pi(R+a)} , \quad (2.13)$$

wobei die tabellierte Funktion  $Y((R+a)/R)$  z. B. Murakami [168], S. 239 f. entnommen werden kann. Damit ergibt sich die differentielle Energiefreisetzungsrate gemäß (1.113) zu

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa+1}{8G} K_I^2 = \frac{\kappa+1}{8G} Y^2 \left( \frac{R+a}{R} \right) \sigma_t^2 \pi (R+a) . \quad (2.14)$$

Integration an den beiden Rissen bis zur Länge  $a$  liefert die inkrementelle Energiefreisetzungsrate

$$\bar{\mathcal{G}}(a) = \frac{1}{a} \int_R^{R+a} \mathcal{G}(r) dr = \frac{\kappa+1}{8G} \frac{\sigma_t^2 \pi}{a} \int_R^{R+a} Y^2 \left( \frac{r}{R} \right) r dr , \quad (2.15)$$

wobei das Integral numerisch ausgewertet werden muss.

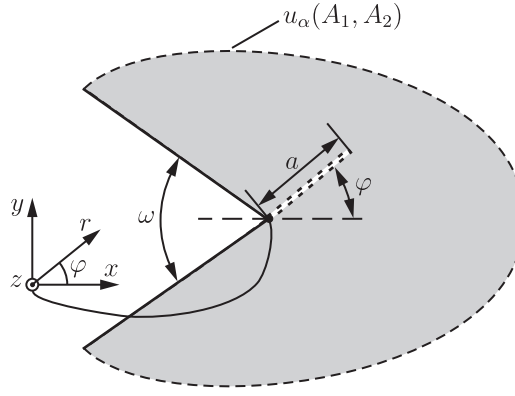


Bild 2.5: Spitzkerbe mit Riss.

### 2.2.2 Spitzkerbe

Von Yosibash et al. [251] wurde, wie in Bild 2.5 dargestellt, ein unendlich ausgedehntes homogenes Gebiet mit isotropem Materialverhalten um eine Spitzkerbe unter beliebiger ebener Beanspruchung betrachtet. Der erwartete Versagensmodus ist ein am Kerbgrund beginnender gerader Riss. Für die Konfiguration ohne Riss haben die asymptotischen Felder für Verschiebungen und Spannungen bei isotropem linear-elastischem Materialverhalten die Form<sup>5</sup>

$$u_\alpha(r, \varphi) = u_{\alpha 0} + A_1 r^{\lambda_1} \hat{f}_\alpha^{(1)}(\varphi) + A_2 r^{\lambda_2} \hat{f}_\alpha^{(2)}(\varphi) + \dots, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(r, \varphi) = A_1 r^{\lambda_1-1} \tilde{f}_{\alpha\beta}^{(1)}(\varphi) + A_2 r^{\lambda_2-1} \tilde{f}_{\alpha\beta}^{(2)}(\varphi) + \dots. \quad (2.17)$$

Die Exponenten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sowie die Umfangsverteilungen  $\tilde{f}_{\alpha\beta}^{(k)}(\varphi)$  hängen nur vom Kerbwinkel  $\omega$  ab und werden aus einem korrespondierenden Eigenwertproblem berechnet. Die Umfangsverteilungen  $\hat{f}_\alpha^{(k)}(\varphi)$  hängen auch von den elastischen Konstanten und damit vom Spannungszustand ab. Beanspruchungsart und -intensität werden durch die Kerbspannungsintensitätsfaktoren für symmetrische ( $A_1$ ) und antisymmetrische ( $A_2$ ) Beiträge beschrieben. Zur Analyse realer Geometrien muss das Verhältnis  $A_2/A_1$  aus einer vollständigen Analyse der ungerissenen Struktur bestimmt werden. Durch asymptotische Analysen lässt sich zeigen, dass die inkrementelle Energiefreisetzungsrate durch die Entwicklung

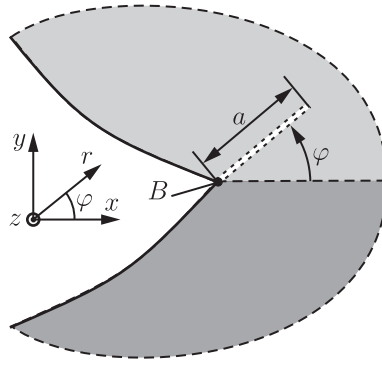
$$\begin{aligned} -\Delta\Pi(a, \varphi) = & A_1^2 a^{2\lambda_1} H_{11}(\omega, \varphi) + A_1 A_2 a^{\lambda_1+\lambda_2} (H_{12}(\omega, \varphi) + H_{21}(\omega, \varphi)) \\ & + A_2^2 a^{2\lambda_2} H_{22}(\omega, \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

dargestellt werden kann, wobei  $a$  und  $\varphi$  Länge und Orientierung des neu gebildeten Risses beschreiben. Die von den elastischen Konstanten unabhängigen Funktionen

$$\tilde{H}_{\alpha\beta}(\omega, \varphi) = H_{\alpha\beta}(\omega, \varphi) \frac{8G}{\kappa + 1} \quad (2.19)$$

werden aus einer Grenzschnittanalyse numerisch bestimmt. Dazu wird mit finiten Elementen eine Kerbe mit einem vom Kerbgrund unter dem Winkel  $\varphi$  ausgehenden geraden

<sup>5</sup>Vgl. Williams [247].



**Bild 2.6:** Untersuchte Versagenskonfigurationen am Bimaterialkerb.

Riss diskretisiert, diverse Randbedingungen aufgebracht und die Funktionen  $\tilde{H}_{\alpha\beta}$  über Linienintegrale berechnet. Für jeden Winkel  $\varphi$  sind dabei zwei Analysen notwendig.

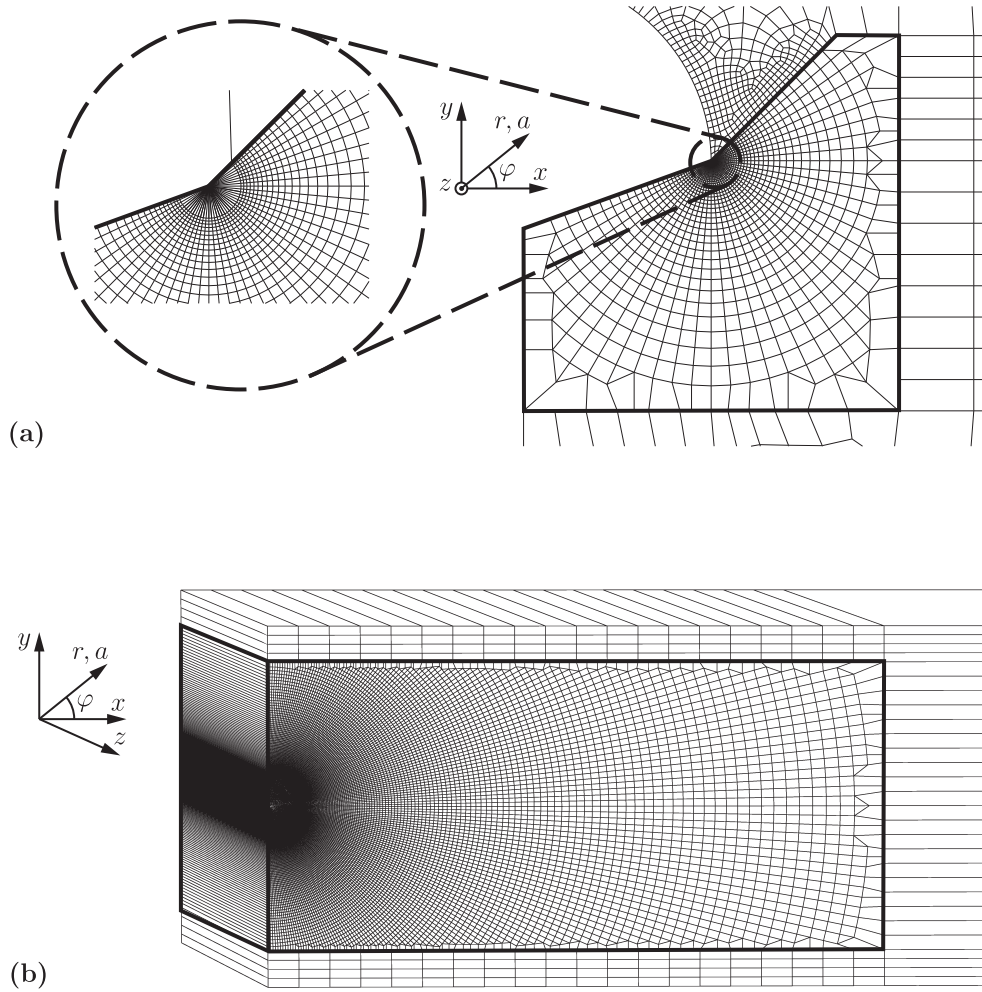
## 2.3 Direkte numerische Formulierung

Obwohl sehr effizient, sind die asymptotischen Formulierungen des Kriteriums nur begrenzt anwendbar. Insbesondere muss die Dominanz der asymptotischen Felder gewährleistet sein, was die analysierbaren Konfigurationen und Lastfälle erheblich einschränkt. Zur Anwendung des hybriden Versagensmodells auf weitere Problemklassen ist die numerische Auswertung gut geeignet. Im Folgenden wird eine verallgemeinerte direkte numerische FE-Implementierung vorgestellt, mit der Bimaterialkerben eben und quasi-räumlich analysiert werden können.

### 2.3.1 Finite-Elemente-Implementierung

#### Diskretisierung

Als potentielle Versagenskonfigurationen werden, wie in Bild 2.6 dargestellt, gerade Risse betrachtet, die vom untersuchten Punkt  $B$  bzw. dem Kerbgrund ausgehen. Zur Anwendung auf vielfältige strukturmechanische Problemstellungen wurde eine universell anwendbare FE-Analyseprozedur für Bimaterialkerben implementiert. Im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand wird das Gebiet, wie in Bild 2.7a dargestellt, durch ebene Kontinuums-elemente diskretisiert, wobei im Kerbgrund Dreieckselemente oder degenerierte Viereckselemente zur Anwendung kommen. Zur Behandlung quasi-räumlicher Probleme wird, wie in Bild 2.7b gezeigt, eine Schicht entsprechender Volumenelemente verwendet. Mit dieser Modellierung können z. B. gerade Laminatränder abgebildet werden.



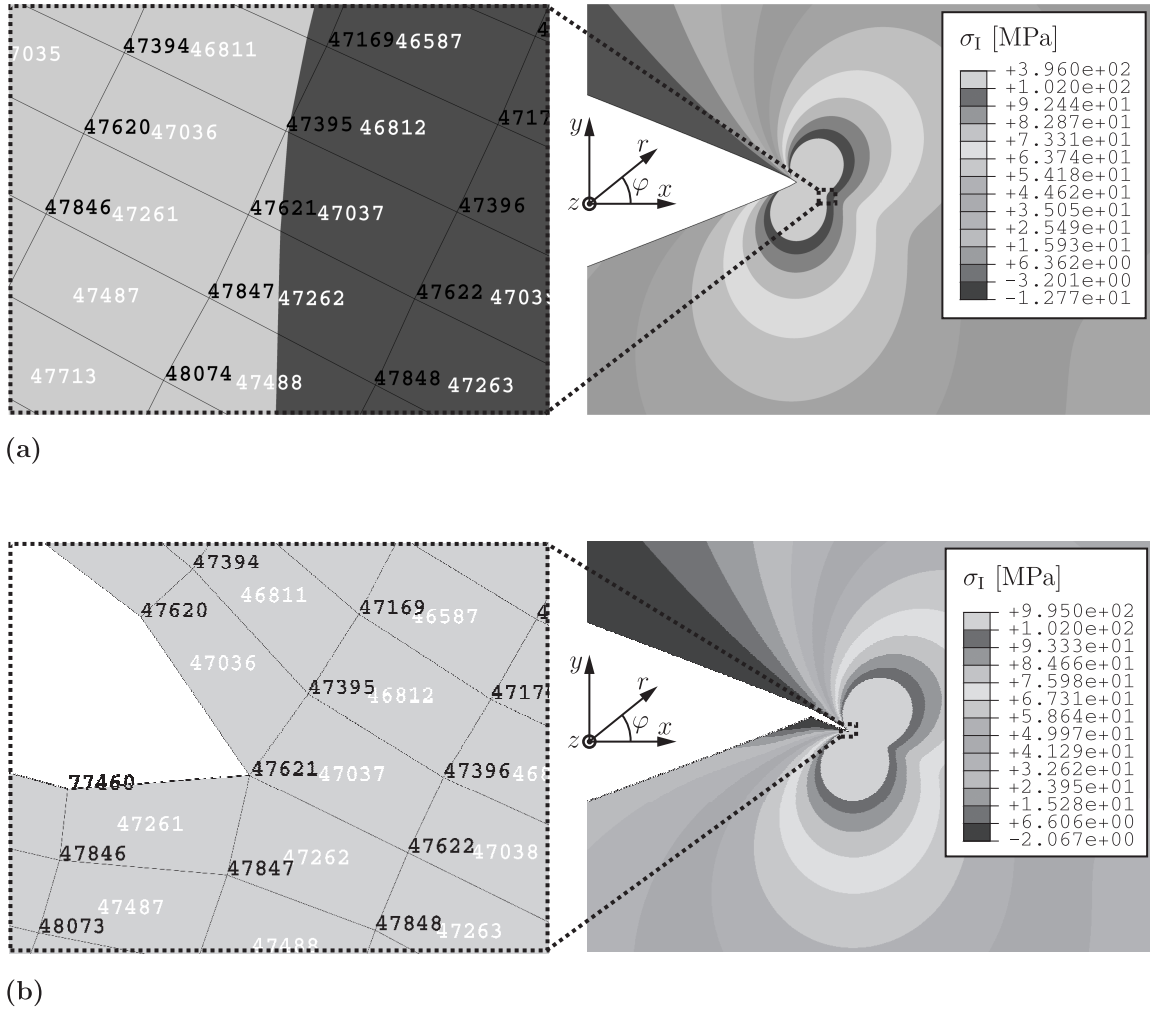
**Bild 2.7:** FE-Diskretisierungsbeispiel für ein ebenes Problem (a) und ein quasi-räumliches Problem (b).

Um den untersuchten Punkt herum wird ein fokussiertes FE-Netz mit variabler Diskretisierung generiert, welches an allen Seiten über sogenannte „hängende Knoten“<sup>6</sup> an das umgebende Netz der untersuchten Struktur gekoppelt werden kann. Zur Analyse von Bimaterialkerben werden die entsprechenden Materialdaten den Elementen zugewiesen. Ebenso können Modelle für Konfigurationen mit einem geraden, vom untersuchten Punkt ausgehenden Riss der Länge  $a$  und der Orientierung  $\varphi$  erstellt werden.

### Auswertung des Versagenskriteriums

Neben dem automatischen Preprocessing leistet die Prozedur auch das automatische Postprocessing der Konfigurationen mit und ohne Riss. Das Spannungsteilkriterium aus (2.2) wird mit der gewählten Funktion  $F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right)$  an der Konfiguration ohne Riss ausgewertet.

<sup>6</sup>Zusätzliche Knoten, deren Verschiebungen zwischen den Verschiebungen benachbarter Knoten interpoliert werden.



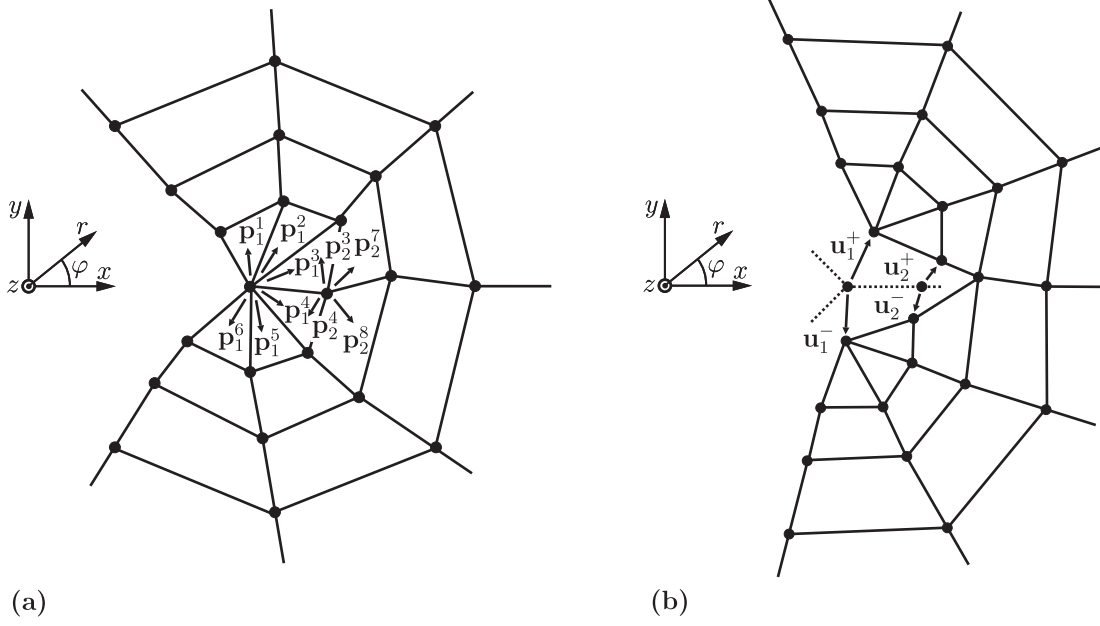
**Bild 2.8:** Auswertung des Spannungskriteriums (a) und Analyse der gerissenen Konfiguration (b).

In Bild 2.8a ist der Bereich um den Kerbgrund, in dem die maximalen ebenen Hauptnormalspannungen  $\sigma_I$  einen kritischen Wert überschreiten in hellgrau dargestellt. Auf dem mittleren dargestellten Knotenstrahl reicht er bis zum Knoten Nr. 47621. Bild 2.8b zeigt die Ergebnisse für eine Konfiguration mit Riss, der bis zu diesem Knoten reicht. Der Knoten Nr. 77460 gehört zu den eingefügten Knoten für die neue Rissflanke.

Für die Konfigurationen mit Riss werden die inkrementellen Energiefreisetzungsraten

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_I + \bar{\mathcal{G}}_{II} + \bar{\mathcal{G}}_{III} = -\frac{\Delta\Pi_I}{\Delta a} - \frac{\Delta\Pi_{II}}{\Delta a} - \frac{\Delta\Pi_{III}}{\Delta a} \quad (2.20)$$

berechnet. Im Falle linearer Elastizität können die Potentialdifferenzen getrennt nach den Beanspruchungsarten über die Risssschließintegrale (1.112) aus den Spannungen in der ungerissenen Struktur und den Rissuferverschiebungen berechnet werden. In diskretisierter Form lassen sich die inkrementellen Energiefreisetzungsraten aus der Summation über alle



**Bild 2.9:** Knotenkräfte in der ungerissenen Konfiguration (a) und knotenweise Rissöffnungsverschiebungen (b).

$N$  Knoten bzw. Knotenpaare am bezüglich  $\varphi$  positiven und negativen Rissufer gemäß

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{G}}_{\text{I}} &= -\frac{1}{2\Delta a} \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{\varphi k}^{(1)-} \left( u_{\varphi k}^{(2)+} - u_{\varphi k}^{(2)-} \right) , \\
 \bar{\mathcal{G}}_{\text{II}} &= -\frac{1}{2\Delta a} \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{rk}^{(1)-} \left( u_{rk}^{(2)+} - u_{rk}^{(2)-} \right) , \\
 \bar{\mathcal{G}}_{\text{III}} &= -\frac{1}{2\Delta a} \sum_{k=1}^N \tilde{p}_{zk}^{(1)-} \left( u_{zk}^{(2)+} - u_{zk}^{(2)-} \right)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

berechnen. Dabei stehen  $\tilde{p}_{ik}^{(1)-}$  für die Knotenschnittkräfte am negativen Schnittufer entlang der virtuellen Rissflanken in der ungerissenen Struktur. Für das Beispiel in Bild 2.9a gilt also

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{p}}_1^{(1)-} &= \mathbf{p}_1^4 + \mathbf{p}_1^5 + \mathbf{p}_1^6 , \\
 \tilde{\mathbf{p}}_2^{(1)-} &= \mathbf{p}_2^4 + \mathbf{p}_2^8 .
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

In Bild 2.9b sind die knotenpaarweisen Rissöffnungsverschiebungen  $u_{ik}^{(2)+}, u_{ik}^{(2)-}$  dargestellt. Für die betrachtete instantane Rissentstehung sind Risslänge  $a$  und Risswachstumsinkrement  $\Delta a$  identisch.

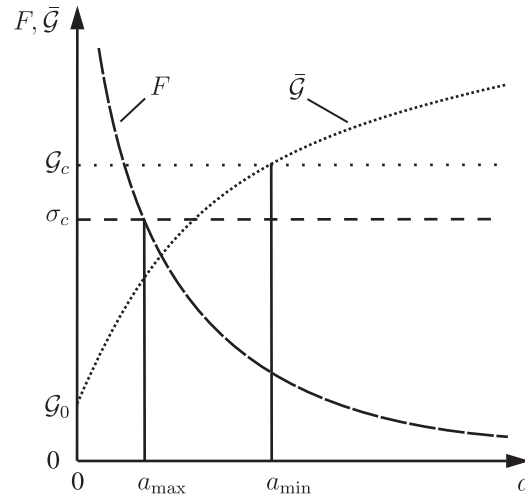


Bild 2.10: Optimierungsproblem.

### 2.3.2 Berechnung der Bruchlast

#### Optimierungsproblem

Die Auswertung des hybriden Versagensmodells an einem Punkt liefert ein nichtlineares restringiertes Optimierungsproblem für die Bruchlast, das in der Prozedur iterativ gelöst wird. Im Folgenden wird die Last durch einen skalaren Parameter  $P$  beschrieben. Für kombinierte Lastfälle kann das Vorgehen auf eine vektorielle Formulierung erweitert werden. Die Bruchlast  $P_f$  ist die niedrigste Last, bei der sich ein Riss der Länge  $a_f$  und der Orientierung  $\varphi_f$  im Sektor  $\varphi_u \leq \varphi \leq \varphi_o$  bildet:

$$P_f = \underset{P>0, a>0, \varphi_u \leq \varphi \leq \varphi_o}{\text{Min}} \quad \{ P \mid \bar{\mathcal{G}}(P, a, \varphi) \geq \mathcal{G}_c, F(P, a, \varphi) \geq \sigma_c \quad \forall \quad a \leq a_f \} \quad . \quad (2.23)$$

Es wird vorausgesetzt:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial P} > 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial P} > 0 \quad . \quad (2.24)$$

Mit der Annahme

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial a} > 0 \quad \forall \quad a \leq a_f \quad , \quad (2.25)$$

die in der Nähe hinreichend starker Spannungskonzentrationen erfüllt ist und durch Überprüfung von

$$F(P, a, \varphi) \geq \sigma_c \quad \forall \quad a \leq a_f \quad (2.26)$$

und

$$\left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{a=a_f} < 0 \quad (2.27)$$

in der numerischen Prozedur, sind  $P_f$  und  $a_f$  ebenso die Lösung des folgenden restringierten Optimierungsproblems

$$\underset{P>0, a>0}{\text{Min}} \quad \left\{ (\bar{\mathcal{G}}(P, a, \varphi) - \mathcal{G}_c)^2 \mid F(P, a, \varphi) = \sigma_c \right\} \quad (2.28)$$

für eine gegebene Orientierung  $\varphi$ . In Bild 2.10 sind die Verhältnisse an einer Spannungskonzentration veranschaulicht. Die Funktion  $F(\sigma_{ij}^{(1)})$  nimmt zum untersuchten Punkt hin zu und der Bereich in dem  $F(\sigma_{ij}^{(1)}) \geq \sigma_c$  gilt, ist nach außen hin durch  $a = a_{\max}$  begrenzt. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate  $\bar{\mathcal{G}}$  nimmt von  $\mathcal{G}_0$  an mit zunehmender Risslänge zu und der Bereich in dem das energetische Teilkriterium erfüllt ist, ist nach innen hin durch  $a = a_{\min}$  begrenzt. Solange kein existierender Riss betrachtet wird, gilt  $\mathcal{G}_0 = 0$ . Für  $P < P_f(\varphi)$  gilt  $a_{\max} < a_{\min}$ , für  $P > P_f(\varphi)$  gilt  $a_{\max} > a_{\min}$ , genau für  $P = P_f(\varphi)$  gilt  $a_{\max} = a_{\min} = a_f(\varphi)$ .

Im Fall linearer Elastizität ohne Anfangsdehnungen gelten für die Spannungen  $\sigma_{ij}^{(1)}$  und für die differentielle Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  folgende Proportionalitäten bezüglich der Last  $P$ :

$$\sigma_{ij}^{(1)}(P, a, \varphi) \sim P \quad , \quad (2.29)$$

$$\mathcal{G}(P, a, \varphi) \sim P^2 \quad . \quad (2.30)$$

Dann können die Gradienten von Zielfunktion und Restriktionen ohne zusätzliche Analysen berechnet werden. Für die Ableitungen der Spannungen gilt somit:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial P} = \frac{\sigma_{ij}^{(1)}}{P} \quad , \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial a} \approx \frac{\Delta \sigma_{ij}^{(1)}}{\Delta a} \quad , \quad (2.32)$$

wobei der Differenzenquotient aus der FE-Lösung berechnet werden kann. Für die Ableitungen der Funktion  $F(\sigma_{ij}^{(1)})$  folgt damit:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\sigma_{ij}^{(1)}}{P} \quad , \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial a} \approx \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\Delta \sigma_{ij}^{(1)}}{\Delta a} \quad . \quad (2.34)$$

Für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate gilt

$$\bar{\mathcal{G}}(P, a, \varphi) = \frac{1}{a} \int_0^a \mathcal{G}(P, \tilde{a}, \varphi) d\tilde{a} \quad (2.35)$$

und somit für die Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial P} = \frac{2\bar{\mathcal{G}}}{P} \quad , \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial a} = -\frac{1}{a} \bar{\mathcal{G}} + \frac{1}{a} \mathcal{G} \quad . \quad (2.37)$$



Durch Einbindung der Gleichheitsrestriktion aus (2.28) als kritische Risslänge  $a_{\max}(P, \varphi) = a_c(P, \varphi)$  in die Zielfunktion erhält man die folgende unrestringierte Formulierung:

$$\text{Min}_{P>0} \quad \left\{ \left( \bar{\mathcal{G}}(P, a_c(P, \varphi), \varphi) - \mathcal{G}_c \right)^2 \right\} . \quad (2.38)$$

Auch hier können im Falle linearer Elastizität ohne Anfangsdehnungen der Gradient der Zielfunktion über die Beziehung

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial P} = \frac{2}{P} \bar{\mathcal{G}} - \frac{1}{a_c} \bar{\mathcal{G}} \frac{\partial a_c}{\partial P} + \frac{1}{a_c} \mathcal{G} \frac{\partial a_c}{\partial P} \quad (2.39)$$

berechnet werden. Zur Ermittlung von  $\frac{\partial a_c}{\partial P}$  wird die Gleichheitsrestriktion

$$F \left( \sigma_{ij}^{(1)}(P, a_c(P, \varphi), \varphi) \right) = \sigma_c \quad (2.40)$$

nach  $P$  differenziert. Es folgt

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial P} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial a_c} \frac{\partial a_c}{\partial P} \right) = 0 \quad (2.41)$$

und somit mit den obigen Ergebnissen näherungsweise

$$\frac{\partial a_c}{\partial P} \approx - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\sigma_{ij}^{(1)}}{P}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^{(1)}} \frac{\Delta \sigma_{ij}^{(1)}}{\Delta a}} . \quad (2.42)$$

Die differentielle Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  kann, wie in Abschnitt 1.4.4 beschrieben, mit entsprechenden Standardmethoden berechnet werden.

## Optimierungsprozedur

Das Optimierungsproblem wird mittels einer in Bild 2.11 dargestellten Optimierungsprozedur gelöst. Nach Eingabe des Startwerts  $P_{c0}$  wird zunächst der für diese Last kritische Winkel  $\varphi_{c0}$  berechnet:

$$\varphi_{c0} = \varphi \left| \left\{ \bar{\mathcal{G}}(P_{c0}, a_c(P_{c0}, \varphi_{c0}), \varphi_{c0}) \geq \bar{\mathcal{G}}(P_{c0}, a_c(P_{c0}, \varphi), \varphi) \quad \forall \quad \varphi_u \leq \varphi \leq \varphi_o \right\} \right. . \quad (2.43)$$

Dabei werden zur Ermittlung von  $\bar{\mathcal{G}}(P_{c0}, a_c(\varphi))$  die notwendigen Pre- und Postprocessing-routinen und die FE-Analysen (FEA) aufgerufen. Für den Fall linearer Elastizität ohne Anfangsdehnungen muss die Analyse für den Fall  $a = 0$  nur einmal durchgeführt werden. Alle anderen Berechnungen können durch Skalierung der Ergebnisse ersetzt werden.

Anschließend wird  $P_{c1}(\varphi_{c0})$  durch Lösung des zugehörigen Optimierungsproblems ermittelt. Aufgrund der gegenüber der restringierten Formulierung reduzierten Anzahl an Variablen und damit weniger erforderlichen FE-Analysen ist die Verwendung der unrestringierten Formulierung deutlich effizienter. Das entstehende eindimensionale Optimierungsproblem kann mittels bewährter Algorithmen<sup>7</sup> gelöst werden. Beim Vorliegen analytischer

<sup>7</sup>Vgl. z. B. Spallucci [221].

Gradienten bietet sich die Verwendung effizienter Verfahren höherer Ordnung an. Auch hier werden die erforderlichen FE-Analysen automatisiert durchgeführt.

Nach der Berechnung von  $P_{c1}$  wird  $\varphi_{c1}$  ermittelt. Im Fall

$$\varphi_{c1} = \varphi_{c0} \tag{2.44}$$

liegt Konvergenz vor und die Versagenskonfiguration wird ausgegeben. Anderenfalls wird mit aktualisierten Werten  $P_{cn+1}$  und  $\varphi_{cn+1}$  weiter gerechnet bis Konvergenz erreicht ist. Das hier dargestellte Verfahren kann auch mit analytisch vorliegenden Lösungen durchgeführt werden, die dann die FE-Analysen ersetzen. Eventuell kann dann auch der Differenzenquotient  $\Delta\sigma_{ij}^{(1)}/\Delta a$  durch einen analytischen Ausdruck für  $\partial\sigma_{ij}^{(1)}/\partial a$  ersetzt werden.

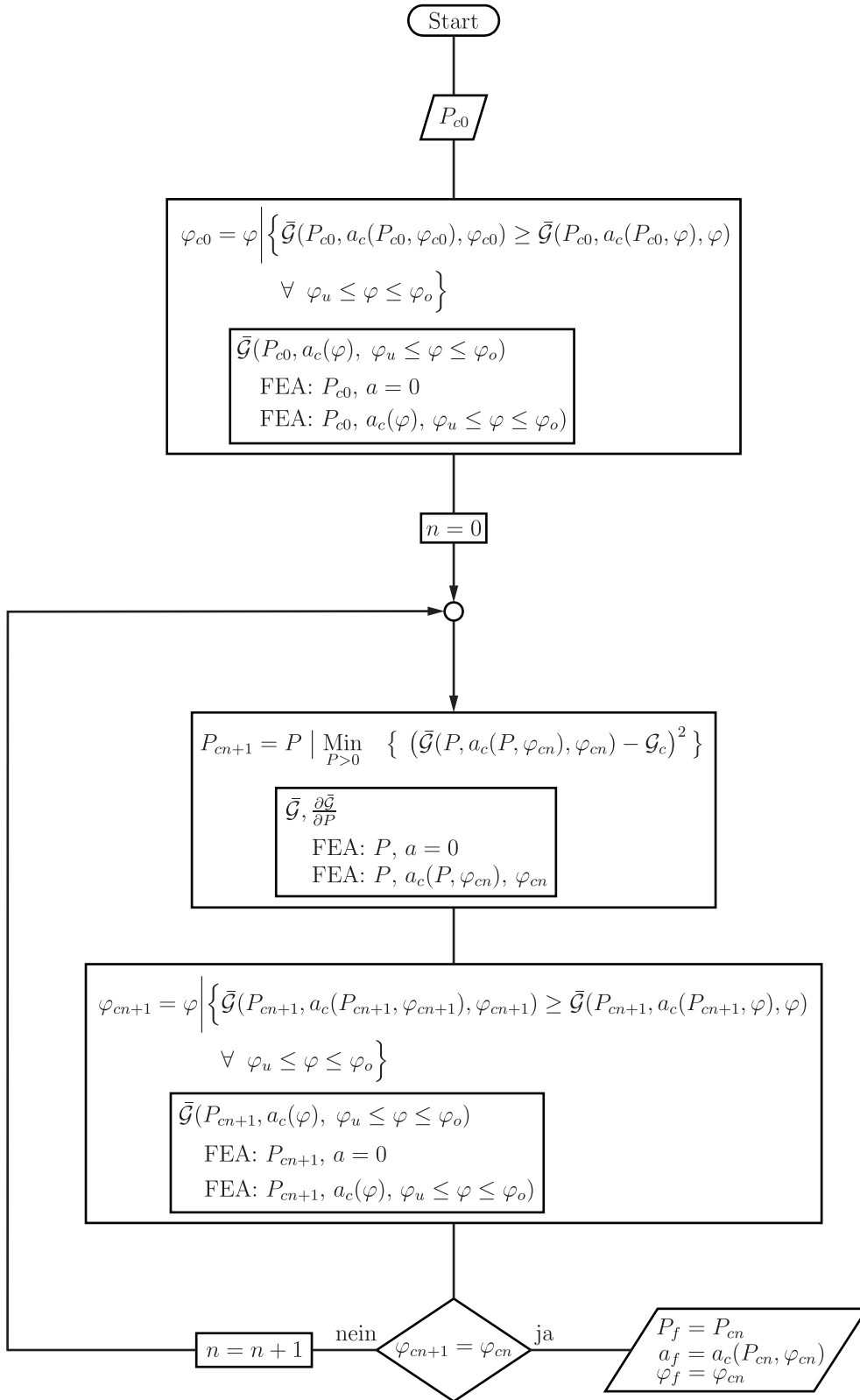


Bild 2.11: Optimierungsprozedur.

## Kapitel 3

# Bewertung exemplarischer Spannungskonzentrationen

In diesem Kapitel werden exemplarische reguläre und singuläre Spannungskonzentrationen mit dem hybriden Versagensmodell analysiert und bewertet. Anhand verschiedener Kerbkonfigurationen in Proben aus PMMA werden asymptotische Formulierungen durch Vergleich mit der neuen direkten numerischen Formulierung bewertet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Weiterhin wird mit der direkten numerischen Formulierung ein neuer Zugang zu Randeffekten in CFK-Laminaten bereitgestellt. Das Kapitel basiert auf den Arbeiten von Hebel et al. [83–85].

### 3.1 Kerben in Proben aus PMMA

Anhand von drei experimentellen Datensätzen an repräsentativen Spannungskonzentrationen in Proben aus PMMA unter einfacher und gemischter Beanspruchung werden nachfolgend asymptotische und direkte numerische Formulierung des Versagensmodells verglichen. Für das Spannungsteilkriterium werden dabei die Normalspannungen senkrecht zum gebildeten Riss

$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) = \sigma_{\varphi} \geq \sigma_c \quad (3.1)$$

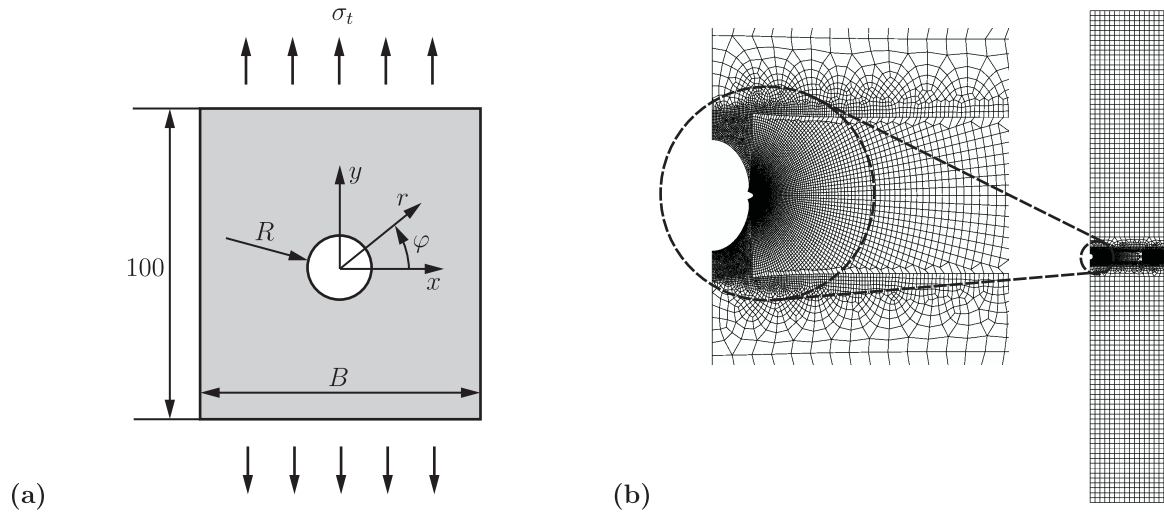
verwendet. Die verwendeten Materialdaten sind in Anhang A.1 aufgeführt.

#### 3.1.1 Zugproben mit Kreisloch

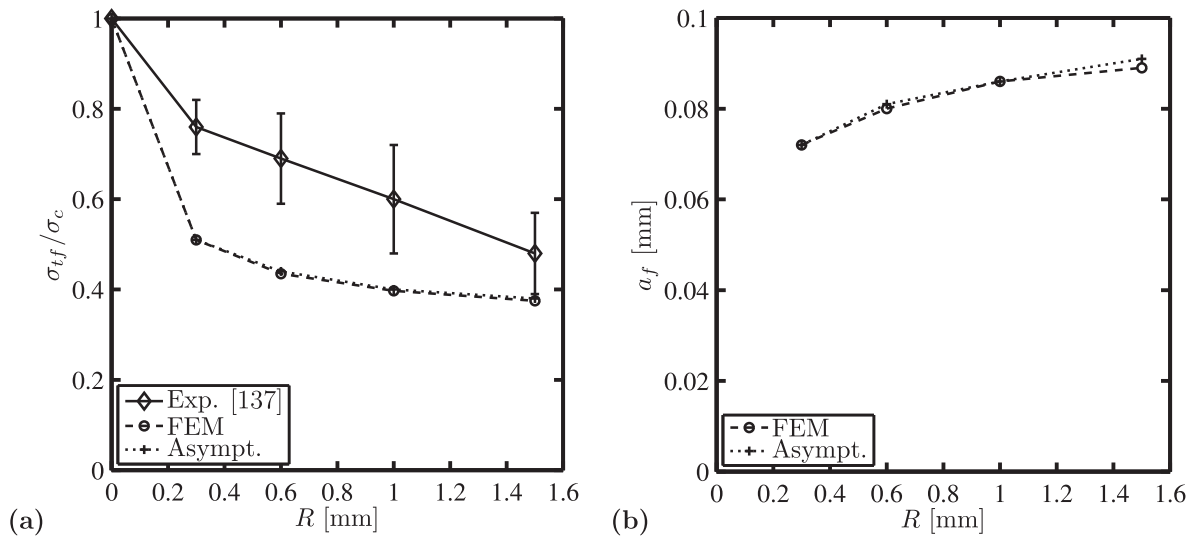
An kreisförmig gelochten uniaxialen Zugproben mit einer Dicke von 5 mm wird die Abhängigkeit der effektiven Festigkeit von der Lochgröße untersucht. Bild 3.1 zeigt den untersuchten Aufbau sowie ein exemplarisches FE-Halbmodell<sup>1</sup>, in dem der durch die Analyseroutine vernetzte Bereich deutlich zu erkennen ist. Für die asymptotische Formulierung

---

<sup>1</sup>Ca. 56.200 Fhg, EVZ.

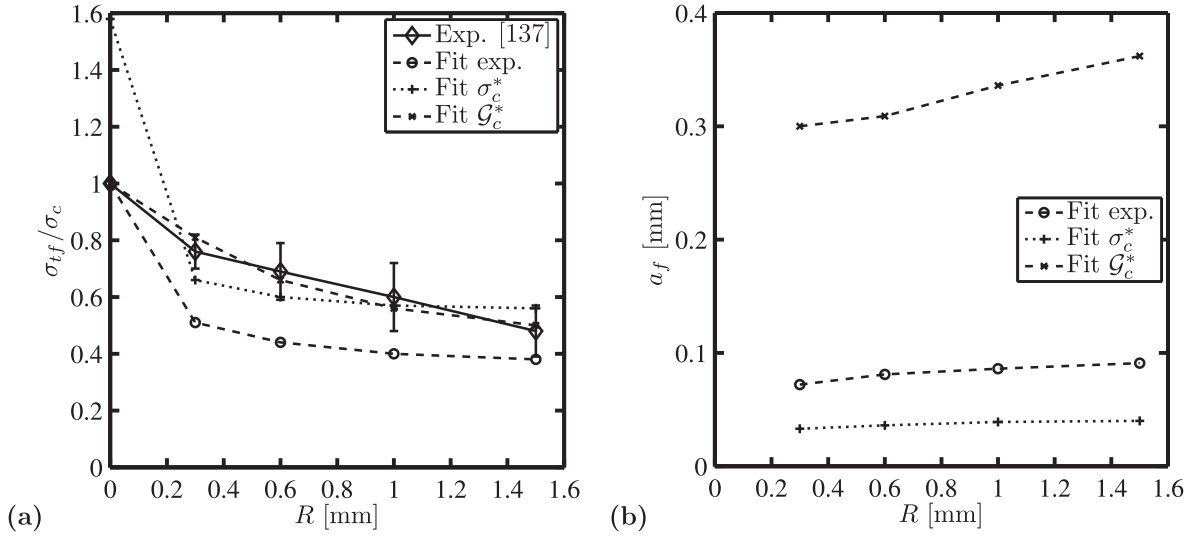


**Bild 3.1:** Zugprobe mit Kreisloch: Skizze (a), FE-Modell (b).



**Bild 3.2:** Modellvergleich, Variation von  $R$ : Versagenslasten (a), Länge des gebildeten Risses (b).

wird der in Abschnitt 2.2.1 dargestellte Zugang verwendet. Zusammen mit den experimentellen Ergebnissen von Li und Zhang [137] sind in Bild 3.2 sind Ergebnisse für  $B = 30$  mm gezeigt. Beide Simulationen liefern nahezu identische Ergebnisse sowohl für die Versagenslast  $\sigma_{tf}/\sigma_c$  als auch für die Länge  $a_f$  des gebildeten Risses. Allerdings werden die experimentellen Versagenslasten bei Verwendung der in Anhang A.1 angegebenen Festigkeit von  $\sigma_c = 72$  MPa und der angegebenen Bruchzähigkeit von  $\mathcal{G}_c = 290$  J/m<sup>2</sup> erheblich unterschätzt. Deshalb wurden für jeweils feste andere Parameter  $\sigma_c$  bzw.  $\mathcal{G}_c$  zur optimalen Darstellung der experimentellen Ergebnisse angepasst, was einen Wert von  $\sigma_c^* = 113$  MPa und einen Wert von  $\mathcal{G}_c^* = 1472$  J/m<sup>2</sup> ergab. Die mit diesen Parametern berechneten Ergebnisse sind in Bild 3.3 dargestellt und bilden den Größeneffekt gut ab. Erwartungsgemäß liefern erhöhte Werte eine Erniedrigung der Rissbildungslänge bei Rechnungen mit  $\sigma_c^*$  und deren Erhöhung bei Rechnungen mit  $\mathcal{G}_c^*$ . Für den Fall der Probe ohne Loch führt die



**Bild 3.3:** Parameteranpassung, Variation von  $R$ : Versagenslasten (a), Länge des gebildeten Risses (b).

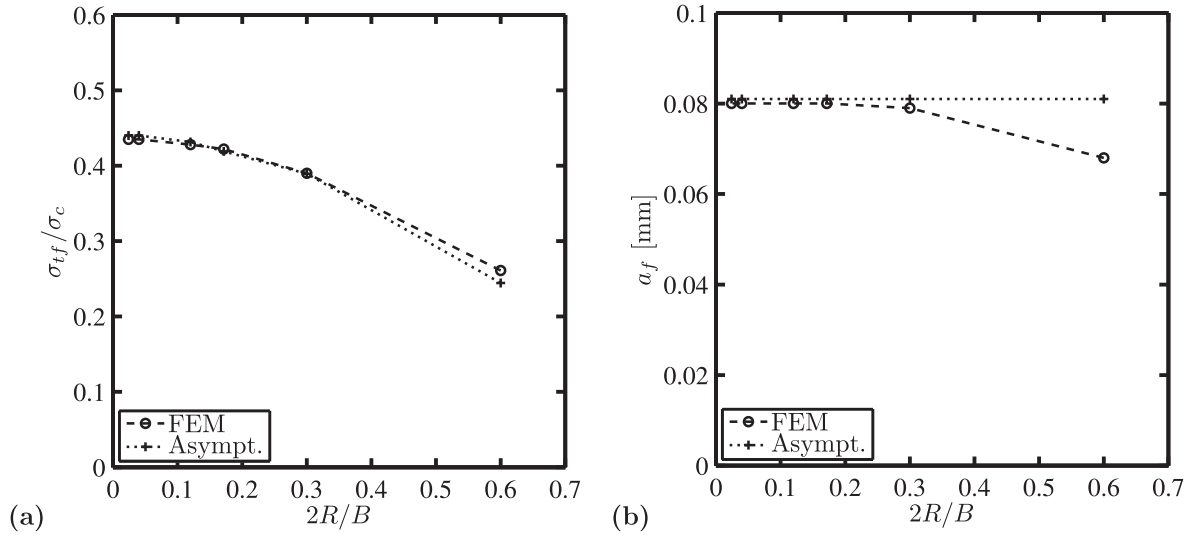
Anpassung von  $\sigma_c^*$  jedoch zu unbefriedigenden Ergebnissen. Obwohl die Bruchzähigkeit, wie in Tabelle A.1 gezeigt, eine weite Streuung aufweist, liegt der angepasste Wert für  $G_c^*$  zu weit außerhalb des Streubereichs. Die Abweichung könnte auf zusätzliche, zäh machende Constrainteffekte zurückzuführen sein. Von Liu und Chao [141] sowie von Chao et al. [29] wurde die Last- und Geometrieabhängigkeit der effektiven Bruchzähigkeit auch für PMMA im Experiment beobachtet. Ein weiterer Einfluss könnte durch physikalische Nichtlinearitäten bedingt sein. Die Last-Verformungskurven der hier ausgewerteten Experimente weisen im höheren Lastbereich leichte Nichtlinearitäten auf. Dies wurde auch von Davenport [42] bei Experimenten an Bruchmechanikproben aus PMMA beobachtet. Schließlich könnte auch duktiles Versagen eine Rolle spielen, dessen Einfluss mit abnehmender Probendicke zunimmt<sup>2</sup>.

### Analyse der Dominanz der asymptotischen Entwicklungen

Für alle experimentell untersuchten Konfigurationen stimmen asymptotische Lösung und direkte numerische Formulierung gut überein, was auf die Dominanz der asymptotischen Entwicklungen hindeutet. In realen Anwendungen, wenn das Loch nicht klein im Vergleich zum Rest der Struktur ist, ist dies nicht immer gegeben. Dieser Fall wird nun exemplarisch für modifizierte gelochte Zugproben mit einem Lochradius von  $R = 0,6$  mm durch Variation des Verhältnisses  $2R/B$  untersucht.

Die Versagenslasten  $\sigma_{tf}/\sigma_c$  und Längen  $a_f$  der gebildeten Risse sind in Bild 3.4 verglichen. Für die Versagenslasten liegt bis hin zu extremen Verhältnissen eine gute Übereinstimmung vor. Für zunehmende Verhältnisse  $2R/B$  verliert die asymptotische Lösung

<sup>2</sup>Vgl. z. B. Taylor [227], S. 109 ff.

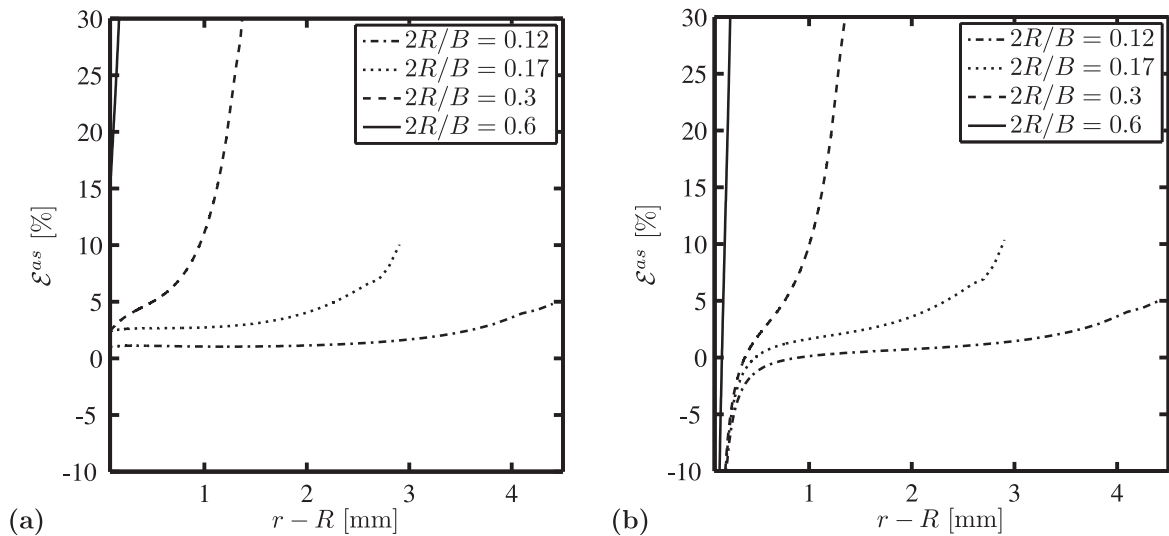


**Bild 3.4:** Variation der Scheibenbreite: Versagenslasten (a), Länge des gebildeten Risses (b).

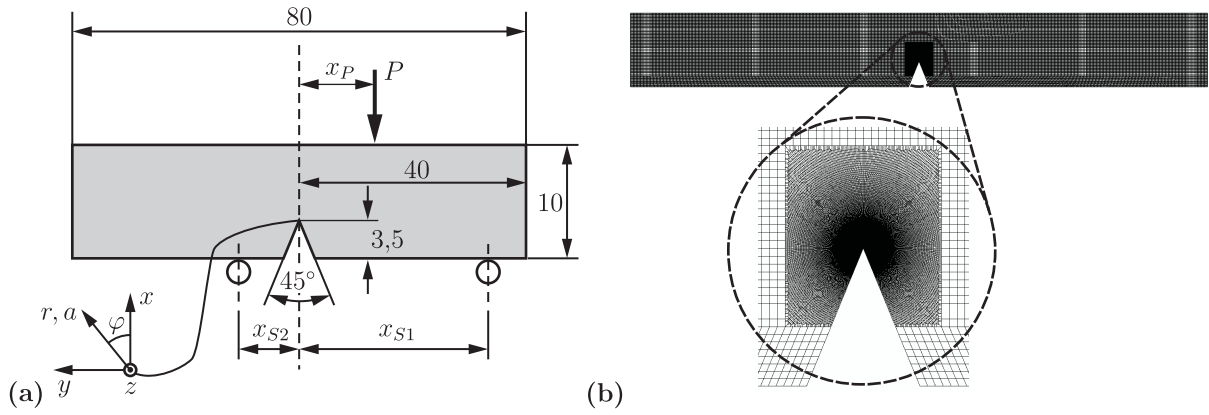
hinsichtlich der vorhergesagten Längen der gebildeten Risse jedoch ihre Gültigkeit. Bei allen untersuchten Fällen liefert das direkte numerische Modell einen Orientierungswinkel von  $\varphi_f = 0^\circ$ . Bild 3.5 zeigt für die Spannungskomponente  $\sigma_\varphi(r - R, 0)$  einen Vergleich der asymptotischen Lösung (2.12) mit der numerischen Lösung für die Zustände mit und ohne Riss. Die relative Abweichung

$$\mathcal{E}^{as}(r - R, 0) = \frac{\sigma_\varphi^{as}(r - R, 0) - \sigma_\varphi^{num}(r - R, 0)}{\sigma_\varphi^{num}(r - R, 0)} \quad (3.2)$$

der asymptotischen Lösung ist als Funktion des Abstandes vom Lochrand aufgetragen. Im ungerissenen Zustand stellt sich bei Verhältnissen  $2R/B \leq 0,17$  ein nach außen durch den Einfluss der freien Kante begrenzter Dominanzbereich ein. Für diese Verhältnisse



**Bild 3.5:** Spannungsfehler der asymptotischen Lösung: ungerissene (a) und gerissene (b) Konfiguration.



**Bild 3.6:** Gekerbte Biegeprobe: Skizze (a), FE-Modell (b).

liegt auch gute Übereinstimmung bei der Länge der gebildeten Risse vor. Im gerissenen Zustand kommt es in der Nähe der Risspitze zu starken Abweichungen, im Fernfeld gilt jedoch die nach außen begrenzte asymptotische Lösung. Für  $2R/B > 0,17$  kommt es zu großen Abweichungen, wie es sich auch hinsichtlich der prognostizierten Länge des gebildeten Risses gezeigt hat. Es bleibt also festzuhalten, dass solange die Spannungen im ungerissenen Zustand gut durch die asymptotische Lösung abgebildet werden und die Länge des gebildeten Risses klein im Vergleich zur analysierten Struktur ist, die Anwendung der asymptotischen Lösung gerechtfertigt ist.

### 3.1.2 Gekerbte Biegeproben unter gemischter Beanspruchung

Die in Bild 3.6a dargestellten Dreipunkt-Biegeproben mit V-Kerben und einer Dicke von 10 mm sind, wie schon in der Einleitung diskutiert, ein Beispiel für eine theoretisch singuläre Spannungskonzentration. Für die asymmetrische Lastaufbringung und Lagerung gilt  $x_{S2} + x_P = \frac{x_{S1} + x_{S2}}{2}$ . Zur Quantifizierung der gemischten Beanspruchung wird ein Parameter  $m_b$  eingeführt:

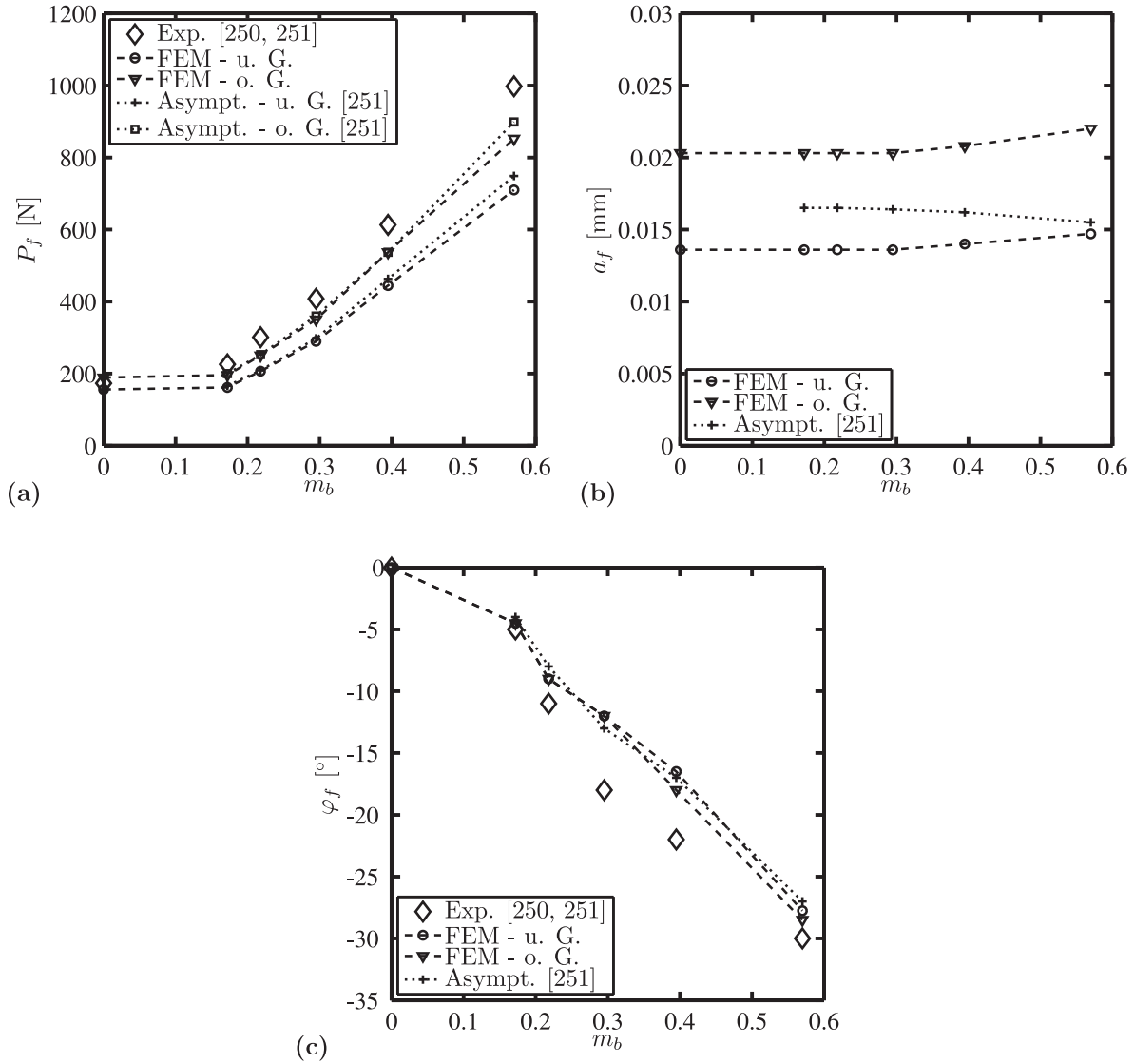
$$m_b = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\bar{\tau}}{\sigma_{max}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_P = 0, \\ \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{10 \text{ mm}}{x_{S1} + x_{S2} - 2x_P} \right) & \text{für } 0 < x_P < \frac{x_{S1} + x_{S2}}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Aus dem Verhältnis der mittleren Schub- und maximalen Normalspannungen an der Stelle der Kerbe für einen durch zwei momentenfreie Lager gestützten Euler-Bernoulli-Balken werden symmetrische und antisymmetrische Beanspruchungsanteile charakterisiert. Für  $m_b = 0$  liegt eine reine Modus I-Beanspruchung und für  $m_b = 1$  eine reine Modus II-Beanspruchung vor.

In Abb. 3.6b ist das FE-Modell<sup>3</sup> gezeigt, welches für die direkte numerische Analyse verwendet wurde. Im fein vernetzten Bereich um den Kerbgrund wurde Rissbildung für die

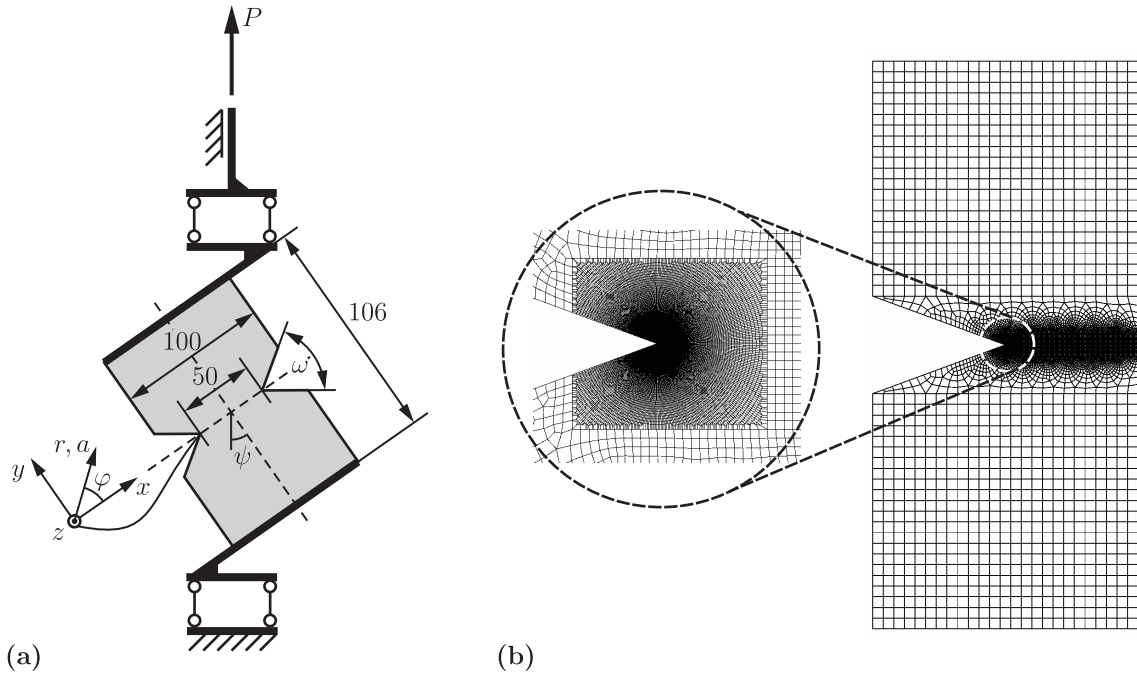
<sup>3</sup>Ca. 290.000 Fhg, EVZ.





**Bild 3.7:** Variation der Beanspruchung: Versagenslasten (a) sowie Länge (b) und Orientierung (c) der gebildeten Risse.

Anfangsriszlängen von 0,001 mm – 2,0 mm mit einem Winkelinkrement von  $0,75^\circ$  untersucht. Die asymptotische Analyse wurde gemäß Abschnitt 2.2.2 von Yosibash et al. [251] mit einer FE-Modellierung ausgeführt, aus der die verallgemeinerten Spannungsintensitätsfaktoren extrahiert wurden. Ergebnisse beider Analysen sind zusammen mit Experimenten von Yosibash et al. [250, 251] in Bild 3.7 dargestellt. Bezüglich der vorhergesagten Versagenslast  $P_f$  werden die experimentellen Ergebnisse von beiden Ansätzen unterschätzt. Mit zunehmend gemischter Beanspruchung geht eine steigende Abweichung einher. Asymptotischer und direkter numerischer Ansatz stimmen gut überein. Die Länge  $a_f$  des gebildeten Risses ist fast konstant. Sie zeigt sich stark von den verwendeten oberen und unteren Bruchzähigkeitsgrenzwerten beeinflusst, während der Einfluss auf die Orientierung  $\varphi_f$  gering ist. Im Allgemeinen wird diese gut abgebildet, jedoch mit abnehmender Genauigkeit für zunehmend gemischte Beanspruchung. Auch die modalen Beiträge zur inkrementellen



**Bild 3.8:** Gekerbte Zugprobe: Skizze (a), FE-Modell (b).

Energiefreisetzungsrate wurden untersucht, wobei durch das direkte numerische Modell in allen Fällen trotz gemischter Beanspruchung ein reines Modus I-Bruchverhalten im Versagensfall prognostiziert wird.

### 3.1.3 Gekerbte Zugproben unter gemischter Beanspruchung

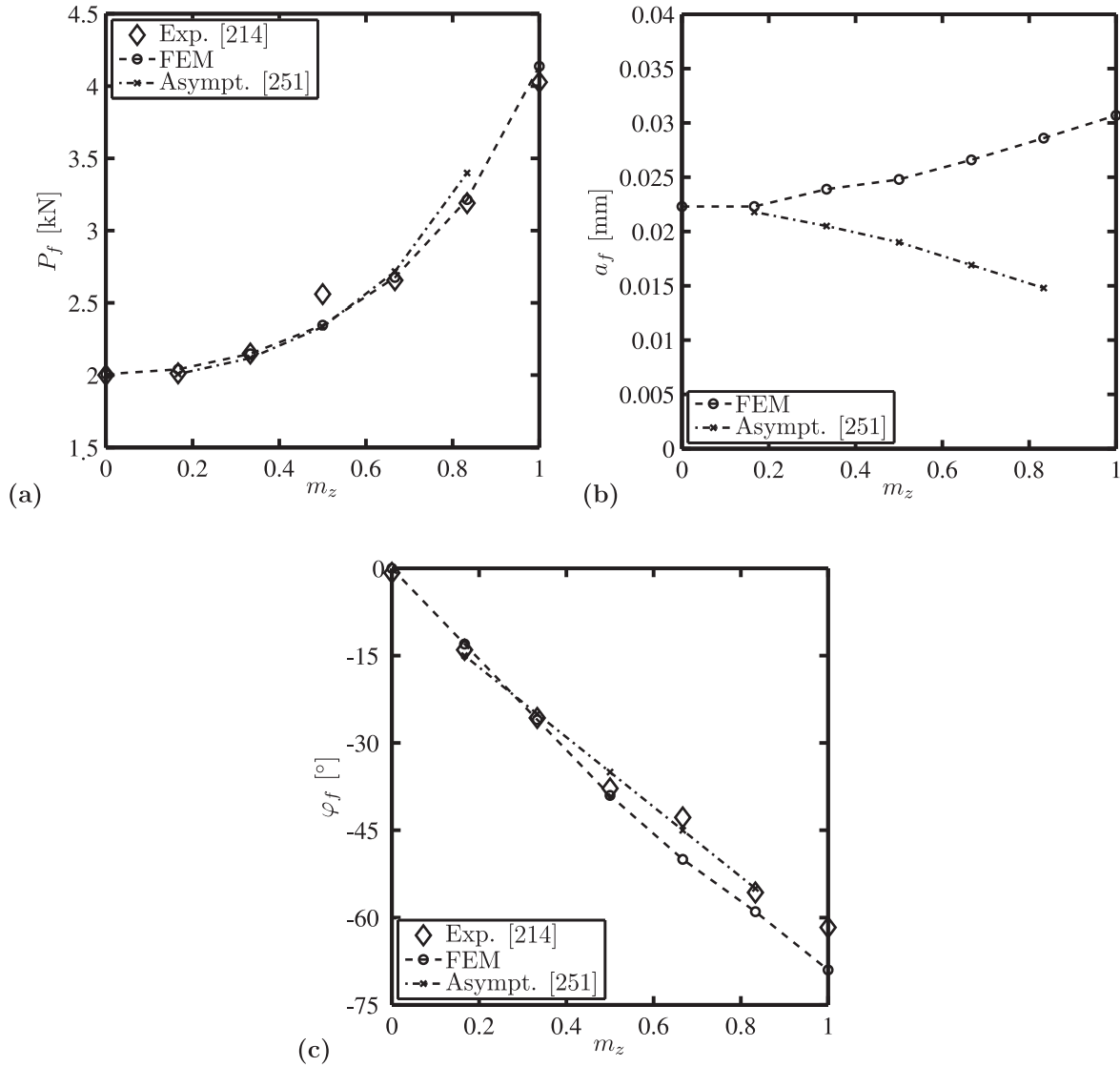
Weiterhin wurden, wie in Bild 3.8a dargestellt, modifizierte Zugversuche an doppelt gekerbten Proben untersucht. Die 5 mm dicken Proben wurden um den Winkel  $\psi$  gedreht, woraus sich eine durch den Parameter

$$m_z = \psi \frac{2}{\pi} \quad (3.4)$$

charakterisierte gemischte Beanspruchung einstellt. Ähnlich dem Parameter  $m_b$  variiert er von null für reine Zugbeanspruchung bis eins. Hierbei sei jedoch angemerkt, dass bei  $m_z = 1$  durch die eingeleitete Biegung immer noch ein symmetrischer Anteil der Beanspruchung verbleibt.

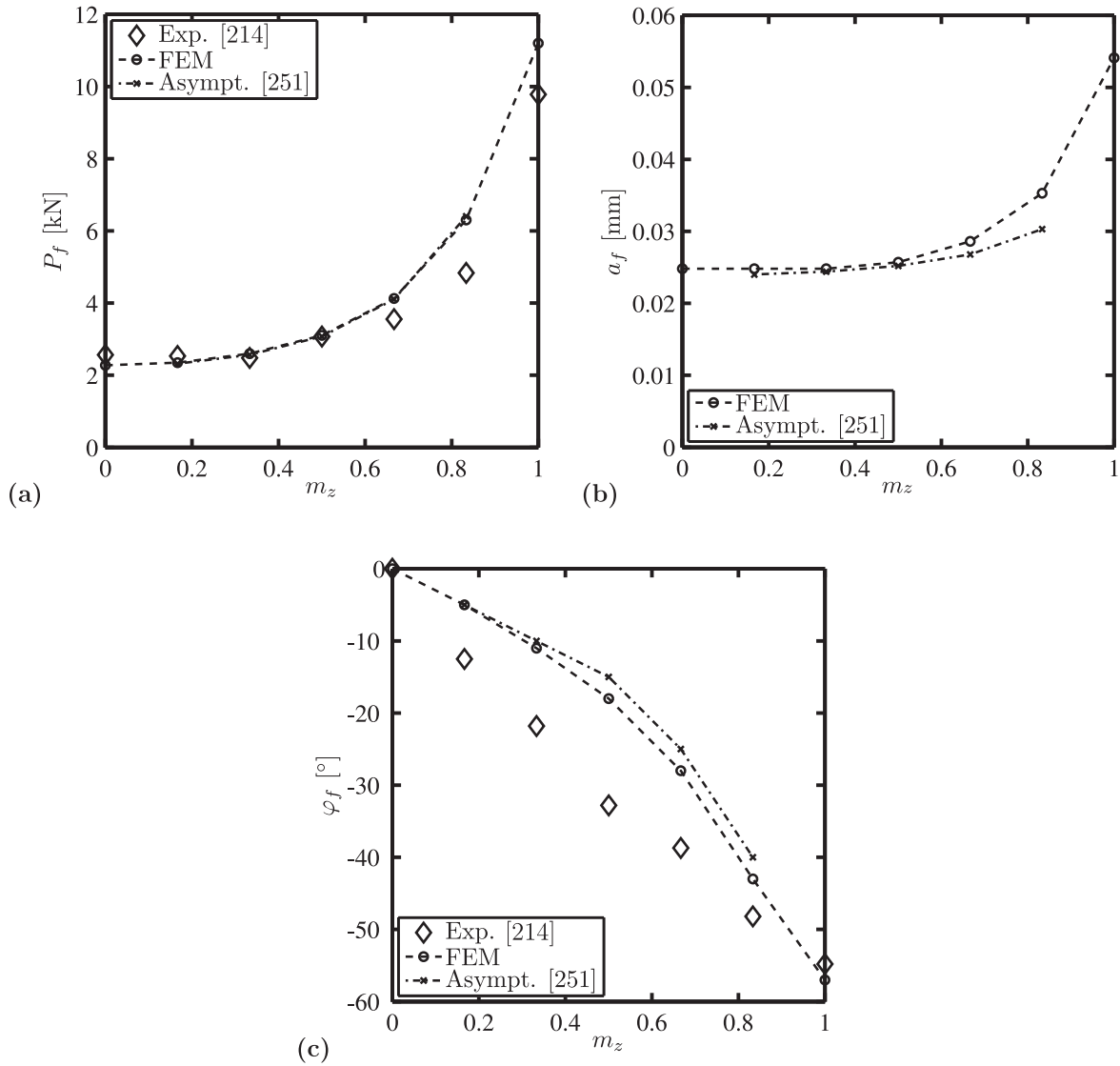
In Bild 3.8b ist das FE-Modell<sup>4</sup> zur direkten numerischen Analyse dargestellt. Durch die Punktsymmetrie des Problems bezüglich des Mittelpunkts sowohl im ungerissenen als auch im gerissenen Zustand, ist ein Halbmodell mit entsprechenden Randbedingungen ausreichend. Zur asymptotischen Analyse gemäß Abschnitt 2.2.2 wurde von Yosibash et al. [251] wieder eine FE-Prozedur verwendet. Zusammen mit experimentellen Ergebnissen von Seweryn et al. [214] sind in Bild 3.9 die Ergebnisse für Kerbwinkel  $\omega = 40^\circ$  gezeigt.

<sup>4</sup>Ca. 155.000 Fhg, EVZ.



**Bild 3.9:** Variation der Beanspruchung,  $\omega = 40^\circ$ : Versagenslasten (a), Anfangsriszlängen (b) und Orientierungen (c).

Beide Zugänge liefern fast identische Ergebnisse für die Versagenslast  $P_f$ , die über die gesamte Bandbreite gemischter Beanspruchung gut vorhergesagt wird. Für die Länge  $a_f$  des gebildeten Risses liefern die Zugänge unterschiedliche Ergebnisse. Bezüglich der Orientierung  $\varphi_f$  des gebildeten Risses weichen die beiden Zugänge nur leicht voneinander ab und stimmen gut mit den experimentellen Ergebnissen überein. Die Ergebnisse für Kerbwinkel  $\omega = 80^\circ$  sind in Bild 3.10 dargestellt. Wieder liefern beide Zugänge fast identische Ergebnisse für die Versagenslast, jedoch mit zunehmender Abweichung von den experimentellen Ergebnissen für zunehmenden Modus II-Anteil. Bezüglich Länge und Orientierung des gebildeten Risses liefern beide Zugänge ähnliche Ergebnisse. Bei der Orientierung weichen Simulation und Experiment jedoch insbesondere im Bereich mit stark gemischter Beanspruchung deutlich voneinander ab. Bezüglich der modalen Beiträge zur inkrementellen



**Bild 3.10:** Variation der Beanspruchung,  $\omega = 80^\circ$ : Versagenslasten (a), Anfangsrissslängen (b) und Orientierungen (c).

Energiefreisetzungsrate wird durch das direkte numerische Modell auch wieder in allen Fällen ein reines Modus I-Bruchverhalten im Versagensfall prognostiziert.

## 3.2 CFK-Laminatränder

Obwohl am freien Laminatrand keine Kerbe vorliegt, entsteht durch die materielle Diskontinuität eine Spannungskonzentration, die, wie in Abschnitt 1.2.2 besprochen, auch singular werden kann. Aufgrund der Anisotropie der beteiligten Materialien und der dreidimensionalen Natur des Problems gestaltet sich eine analytische Modellierung besonders schwierig. Mit der neuen direkten numerischen Formulierung des hybriden Versagensmodells werden nachfolgend Laminat-Randeffekte in ebenen Komposit-Laminaten bewertet.

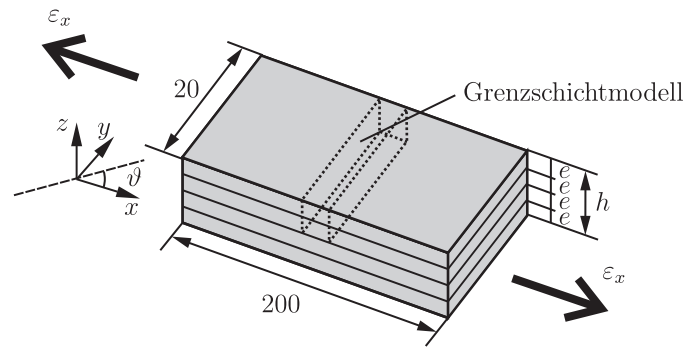


Bild 3.11: Laminatprobe unter uniaxialem Zug.

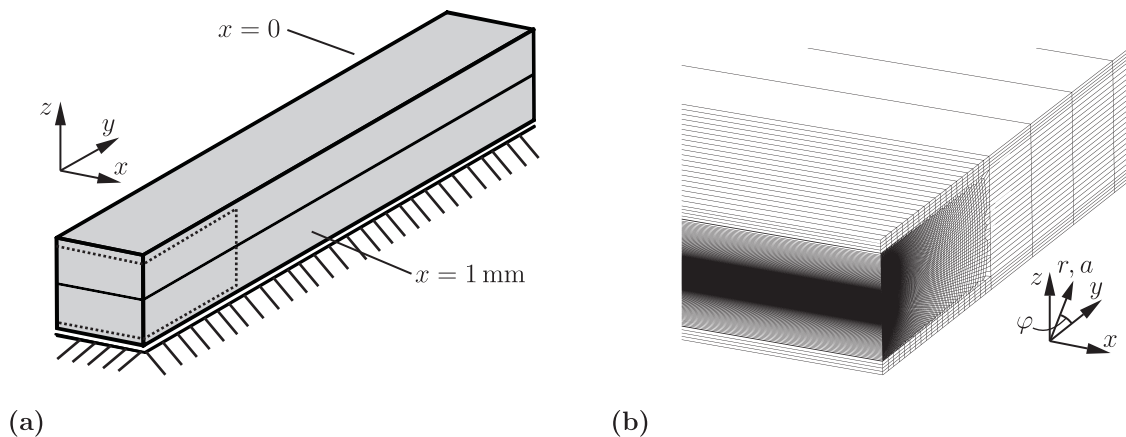


Bild 3.12: Grenzschichtmodell: Randbedingungen(a), Ausschnitt des FE-Modells (b).

### 3.2.1 Quasi-räumliche Modellierung

Als repräsentative Beispiele werden symmetrische  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Kreuzverbunde und  $[\pm\alpha]_S$ -Winkelverbunde unter uniaxialem Zug betrachtet. Wie in Bild 3.11 dargestellt, bestehen die Proben aus vier gleich dicken Einzelschichten aus T800/epoxy. Bedingt durch die unidirektionale Faserverstärkung weisen diese eine deutliche Anisotropie auf, die auch aus den im Anhang A.2 aufgeführten Materialdaten ersichtlich ist.

Der Laminat-Randeffekt führt in den Grenzflächen zwischen den  $0^\circ$ - und  $90^\circ$ -Schichten im Kreuzverbund sowie den  $+\alpha$ - und  $-\alpha$ -Schichten im Winkelverbund zu überhöhten, theoretisch singulären Randspannungen. Obwohl die theoretischen Singularitäten in der Regel schwächer sind als bei den zuvor behandelten V-Kerben, können Delaminationen entstehen, die möglicherweise zum vorzeitigen Laminatversagen führen. Beim  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Laminat sind die interlaminaren Schälspannungen  $\sigma_z$  besonders kritisch, während es beim  $[\pm\alpha]_S$ -Laminat die interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{xz}$  sind.

Zur Anwendung des hybriden Versagensmodells wird die Analyseprozedur in ein in Bild 3.12 dargestelltes quasi-räumliches Grenzschicht-Halbmodell<sup>5</sup> aus einer Schicht mit

<sup>5</sup>Ca. 300.000 Fhg.

Volumenelementen integriert. Zur Darstellung des verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustandes in der Zugprobe mit im Allgemeinen uneben verformten Querschnitten, werden die folgenden Periodizitätsrandbedingungen an den beiden Seitenflächen formuliert:

$$\begin{aligned} u(x = 1 \text{ mm}, y, z) - u(x = 0, y, z) &= \varepsilon_x \cdot 1 \text{ mm} \quad , \\ v(x = 1 \text{ mm}, y, z) &= v(x = 0, y, z) \quad , \\ w(x = 1 \text{ mm}, y, z) &= w(x = 0, y, z) \quad . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zusätzlich zur über die Dehnung  $\varepsilon_x$  formulierten mechanischen Last wird noch eine fertigungsbedingte homogene Temperaturlast von  $\Delta T = -150 \text{ K}$  aufgebracht. Als potentielle Rissausbreitungsrichtung werden nur Randdelaminationen in den Grenzflächen betrachtet.

### 3.2.2 Symmetrische Kreuzverbunde unter uniaxialem Zug

In Bild 3.13a sind Ergebnisse der Delaminationsanalyse für Kreuzverbunde als Funktion der Einzelschichtdicke  $e$  gezeigt. Als Spannungsteilkriterium wurde im hybriden Versagensmodell die Bedingung

$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) = \sigma_z \geq \sigma_c \quad (3.6)$$

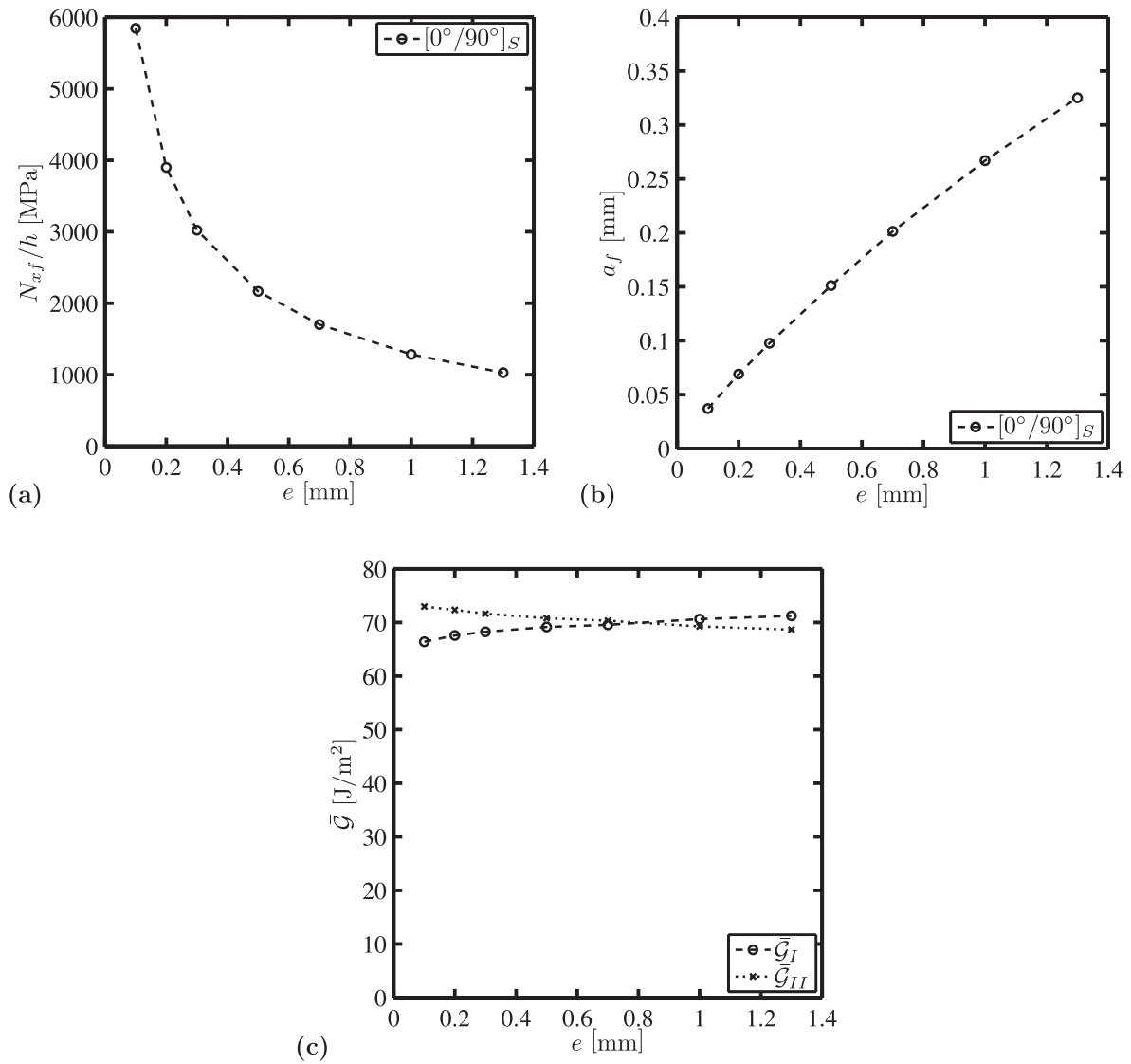
ausgewertet. Die Ergebnisse bestätigen eine Abnahme der effektiven Festigkeit mit zunehmender Schichtdicke, die auch im Experiment beobachtet wird. Wie in Bild 3.13b dargestellt, nimmt die Länge des gebildeten Risses mit der Schichtdicke zu. Bezüglich der Bruchmoden werden, wie in Bild 3.13c gezeigt, gleiche Beiträge der Moden I und II beobachtet, die nahezu unabhängig von der Schichtdicke sind. Der Modus III liefert für diese Konfiguration keinen Anteil.

### 3.2.3 Symmetrische Winkelverbunde unter uniaxialem Zug

Für symmetrische Winkelverbunde wurden von Harry et al. [72] zur Untersuchung von Randdelaminationen Experimente an Zugproben durchgeführt. Der in Bild 3.14a dargestellte Vergleich zwischen den Versagenslasten für das Gesamtlaminat gemäß klassischer Laminattheorie und Tsai-Wu-Kriterium und den experimentell ermittelten Lasten, bei denen Randdelaminationen einsetzen, macht deutlich, wie Laminat-Randeffekte zu vorzeitigem Versagen führen können. In Bild 3.14b sind Ergebnisse der Analyse mit dem hybriden Versagensmodell gezeigt. Dabei wurde als Spannungsteilkriterium die Bedingung

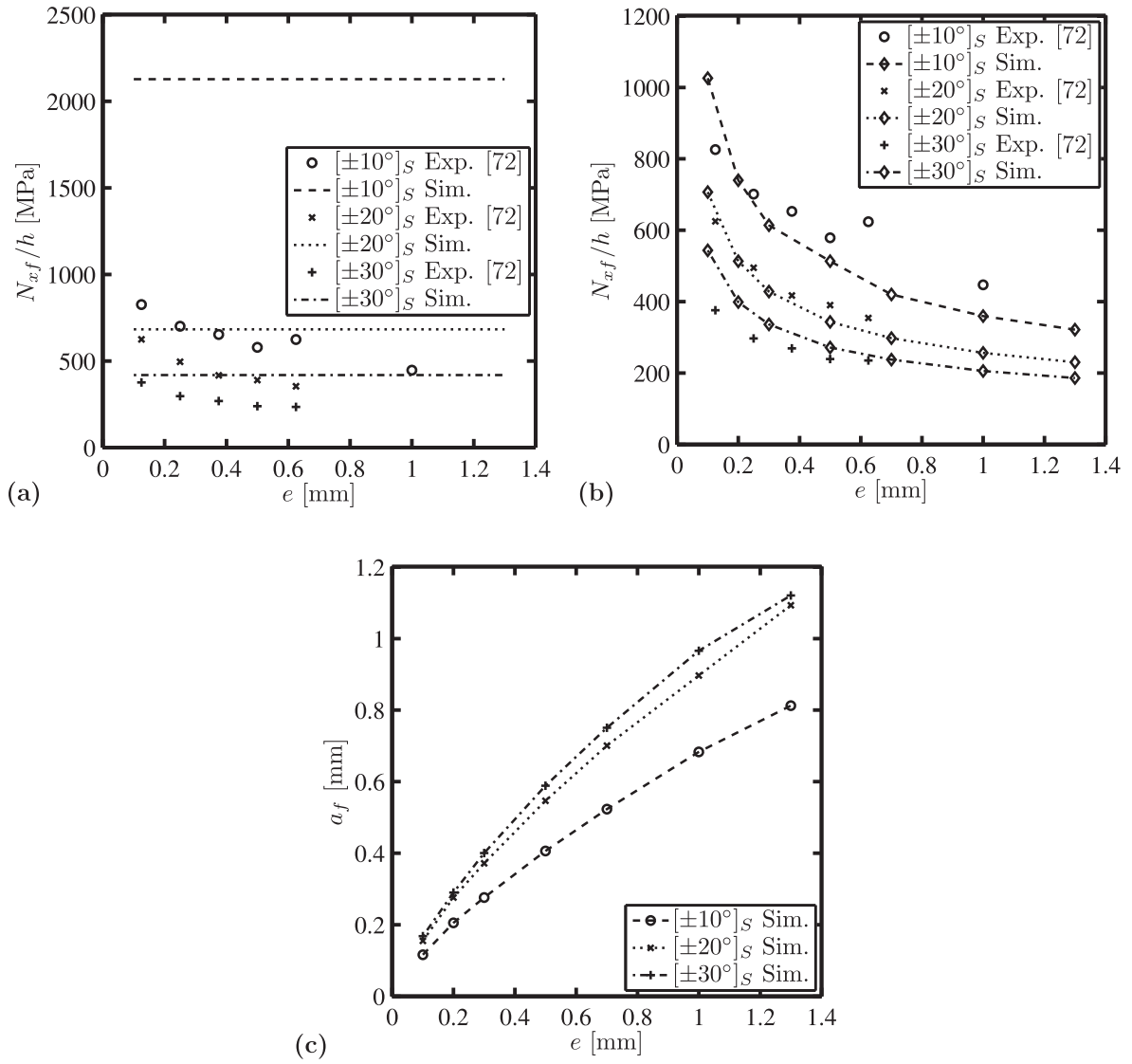
$$F\left(\sigma_{ij}^{(1)}\right) = |\tau_{xz}| \geq \tau_c \quad (3.7)$$

ausgewertet. Auch für die Winkelverbundproben führt eine höhere Schichtdicke zu einer Abnahme der effektiven Festigkeit. Experiment und Simulation stimmen gut überein. Auch der Einfluss des Lagenwinkels wird durch das Modell gut abgebildet. Im untersuchten Bereich führt ein größerer Lagenwinkel  $\alpha$  zu einer Abnahme der effektiven Festigkeit.



**Bild 3.13:** Ergebnisse für  $[0^\circ/90^\circ]_S$ -Laminat, Variation der Schichtdicken: Versagenslasten (a), Anfangsriszlängen (b), inkrementelle Energiefreisetzungsraten (c).

Wie aus Bild 3.14c ersichtlich, führen auch für diesen Lagenaufbau höhere Schichtdicken zu längeren Anfangsriszen. Bezüglich der Anteile der Bruchmoden wurde ausschließlich ein Beitrag des Modus III festgestellt.



**Bild 3.14:** Ergebnisse für  $[\pm\alpha]_S$ -Laminates, Variation der Schichtdicken: Vergleich mit Tsai-Wu-Kriterium (a), Vergleich mit hybridem Versagensmodell (b), Anfangsrisslängen (c).





## Kapitel 4

# Anwendung auf Fügungen in Hochtemperatur- Brennstoffzellenstapeln

Nach der erfolgreichen Anwendung auf exemplarische Konfigurationen wird die Leistungsfähigkeit des neu entwickelten Verfahrens abschließend in der Anwendung auf reale Bauteile demonstriert. Glaskeramische Fügungen in oxidkeramischen, am Forschungszentrum Jülich entwickelten Hochtemperatur-Brennstoffzellen<sup>1</sup> werden analysiert und bewertet. Nach einer Einführung in die Problemstellung folgen Analyse und Bewertung des Ausgangsentwurfs sowie alternativer Entwürfe. Dieses Kapitel basiert auf den Arbeiten von Hebel et al. [82] sowie von Hebel und Becker [80, 81].

### 4.1 Problemstellung

Im Hinblick auf die folgenden Analysen steht an dieser Stelle eine kurze Einführung in die Problemstellung. Für umfassende Darstellungen zum Thema Brennstoffzellen sei auf einschlägige Fachliteratur<sup>2</sup> verwiesen. Bezüglich der Thematik der Bewertung von Fügungen in SOFC-Stapeln sei auch auf die Arbeit von Müller [158] sowie auf die dort zitierte Literatur verwiesen.

**Tabelle 4.1:** Übersicht über einige Brennstoffzellentypen (Heinzel et al. [87], Fuel Cell Handbook [236]).

| Abkürzung           | PEFC                        | AFC                             | PAFC               | MCFC                                 | SOFC                                 |
|---------------------|-----------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Englisch            | Proton exchange membrane FC | Alkaline fuel cell (FC)         | Phosphoric acid FC | Molten carbonate FC                  | Solid oxide FC                       |
| Deutsch             | Polymer-membran-BZ          | Alkalische Brennstoffzelle (BZ) | Phosphorsaure BZ   | Schmelzkarbonat-BZ                   | Oxidkeramische BZ                    |
| Betriebs-temperatur | 40 – 80°C                   | 65 – 220°C                      | 200°C              | 650°C                                | 600 – 1000°C                         |
| Brennstoff          | H <sub>2</sub>              | H <sub>2</sub>                  | H <sub>2</sub>     | H <sub>2</sub> , CO, CH <sub>4</sub> | H <sub>2</sub> , CO, CH <sub>4</sub> |

### 4.1.1 Oxidkeramische Hochtemperatur-Brennstoffzellen

#### Einordnung und Anwendung

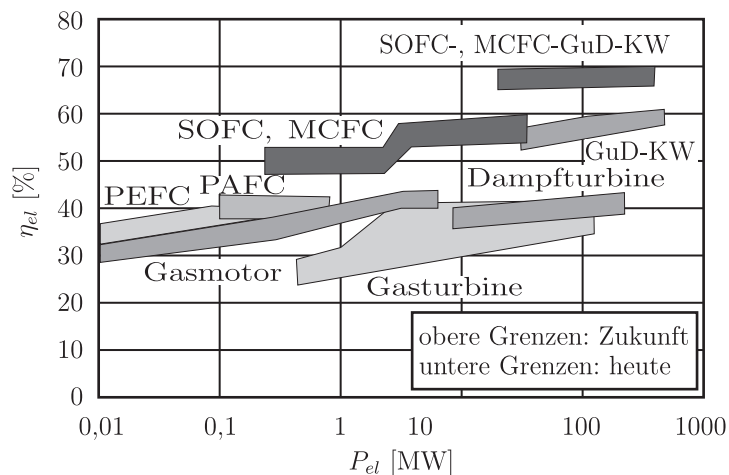
Die ersten erfolgreichen Versuche zur direkten Umwandlung von chemischer in elektrische Energie wurden schon im 19. Jahrhundert unternommen. Bestrebt, den energieaufwendigen Weg mittels Wärmekraftmaschine und Generator über thermische und mechanische Energieformen zu umgehen, konstruierten Christian Friedrich Schönbein (1799-1868) sowie William Robert Grove (1811-1896) zunächst unabhängig voneinander, aber später mit regem Austausch<sup>3</sup>, die ersten Brennstoffzellen. Auch heute ist die Forderung nach effizienten Energieumwandlungsprozessen nach wie vor aktuell, gerade zur Umsetzung wichtiger Ziele wie Ressourcenschonung und Minderung des Ausstoßes an Treibhausgasen. Hierzu kann die Brennstoffzelle aufgrund ihres hohen Wirkungsgrades sowohl im direkten Betrieb mit Wasserstoff aus fossilen Brennstoffen als auch als Zwischenglied in der Kette mit Kernenergie oder regenerativen Energieformen einen Beitrag leisten. Letzteres kann z. B. mit elektrolytisch erzeugtem Wasserstoff realisiert werden.

Treibende Kraft ist in allen Zelltypen das Partialdruckgefälle der jeweils verwendeten Gasspezies. Gemeinsam ist auch der Aufbau aus Kathode, Elektrolyt und Anode, die die kontrollierten Teilreaktionen des Prozesses ermöglichen. Unterschieden werden die Zelltypen nach Art des Elektrolyten oder nach hoher und niedriger Betriebstemperatur.

<sup>1</sup>Engl. „solid oxide fuel cell“ (SOFC).

<sup>2</sup>Vgl. z. B. Heinzel et al. [87], Larminie und Dicks [118], Vielstich et al. [237, 238], Minh und Takhashi [153] sowie das Fuel Cell Handbook [236].

<sup>3</sup>Die Anfangszeiten der Brennstoffzellenentwicklung sowie der Briefwechsel zwischen Schönbein und Grove wurden von Bossel [21] beschrieben.



**Bild 4.1:** Elektrischer Wirkungsgrad verschiedener Energiewandlungssysteme (Oertel und Fleischer [178] sowie Stolten [222]).

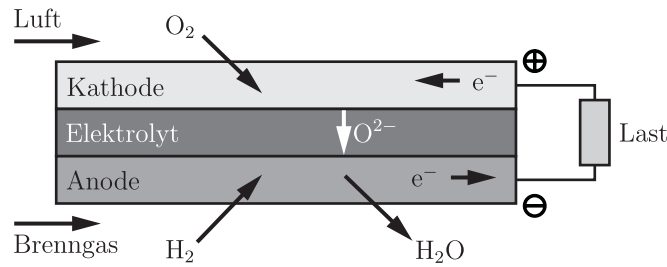
Tabelle 4.1 zeigt eine Übersicht über die wichtigsten verwendeten Zelltypen. Kommerzielle Anwendung finden zur Zeit nur Niedertemperaturzellen in speziellen Nischen wie der Raumfahrt<sup>4</sup> oder dem U-Bootbau<sup>5</sup>. Auch wenn die Bandbreite potentieller Applikationen groß ist, fehlen der Brennstoffzellentechnologie für die breite kommerzielle Anwendung noch Langlebigkeit, Zuverlässigkeit, günstige Kostenstruktur und Marktakzeptanz, um konkurrenzfähig zu sein. Hier besteht noch großer Entwicklungsbedarf. Außerdem fehlt für Zellen mit noch wenig verbreiteten Brennstoffen die notwendige Infrastruktur.

Leistung und Wirkungsgrad verschiedener Energiewandlungssysteme sind in Bild 4.1 dargestellt. Deutlich erkennbar ist, gemessen am elektrischen Wirkungsgrad, die Überlegenheit der Brennstoffzellentechnologie gegenüber konventionellen Wärmekraftprozessen. Die Hochtemperaturzellen besitzen die höchsten Wirkungsgrade, die für ein mit Gas- und Dampfturbinen (GuD) gekoppeltes Gesamtsystem hoher Leistung sogar noch höher sind. Von allen Zelltypen liegen mit SOFC-Zellen die meisten Erfahrungen vor. Auch wenn die MCFC-Zellen einen ähnlichen Wirkungsgrad und sogar eine niedrigere Betriebstemperatur aufweisen, sind diese aufgrund des flüssigen Elektrolyten und der langen Hochlaufzeit im Anwendungsspektrum stärker eingeschränkt als SOFC-Zellen mit festem Elektrolyten. Ein weiterer Vorteil von Hochtemperaturzellen ist die Möglichkeit zur direkten Verwendung anderer Brennstoffe als Wasserstoff, z. B. Erdgas oder Diesel, ohne zusätzliche Vorreformierung. Die Bandbreite potentieller Anwendungen ist groß. Sie reicht von der zentralen und dezentralen stationären Energieversorgung bis hin zu mobilen Anwendungen als Haupt- oder Hilfsaggregat<sup>6</sup>. Derzeitige Hauptentwicklungsziele sind die Erhöhung

<sup>4</sup>Z. B. im Rahmen der US-amerikanischen Raumfahrtprogramme „Gemini“ und „Apollo“ sowie für das „Space Transportation System“, siehe Fuel Cell Handbook [236], S. 1-23.

<sup>5</sup>Z. B. die deutsche außenluftunabhängige U-Boot-Klasse 212 A, vgl. Rössler [206] und Pommer et al. [185].

<sup>6</sup>Engl. „auxiliary power unit“ (APU).

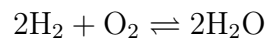


**Bild 4.2:** Funktionsprinzip einer SOFC-Zelle im Betrieb mit Wasserstoff.

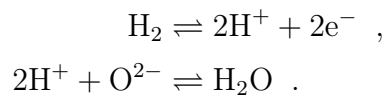
der Langzeitstabilität durch Erforschung und Vermeidung von Degradation, Senkung der Herstellungskosten, Betrieb mit schon jetzt verfügbaren Brennstoffen sowie die Senkung der Betriebstemperatur<sup>7</sup>.

### Funktionsprinzip

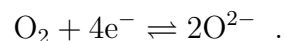
Die stark exotherme Synthesereaktion von Wasser aus Wasserstoff und Sauerstoff



läuft in der SOFC-Zelle kontrolliert in räumlich getrennten Teilreaktionen ab. Das Funktionsprinzip ist in Bild 4.2 dargestellt. Reaktionsort sind die jeweiligen Dreiphasengrenzen Elektrolyt-Elektrode-Gas. Die Elektrolytschicht ist gasundurchlässig aber bei Betriebstemperatur exakt ionenleitend für die Sauerstoffanionen. Zusammen mit den Elektroden-schichten auf beiden Seiten bildet sie den Schichtverbund der Membranelektroden-einheit<sup>8</sup>. An der Anode wird der Wasserstoff des Brenngases oxidiert und die Sauerstoffanionen reagieren mit den Wasserstoffkationen zu Wasser



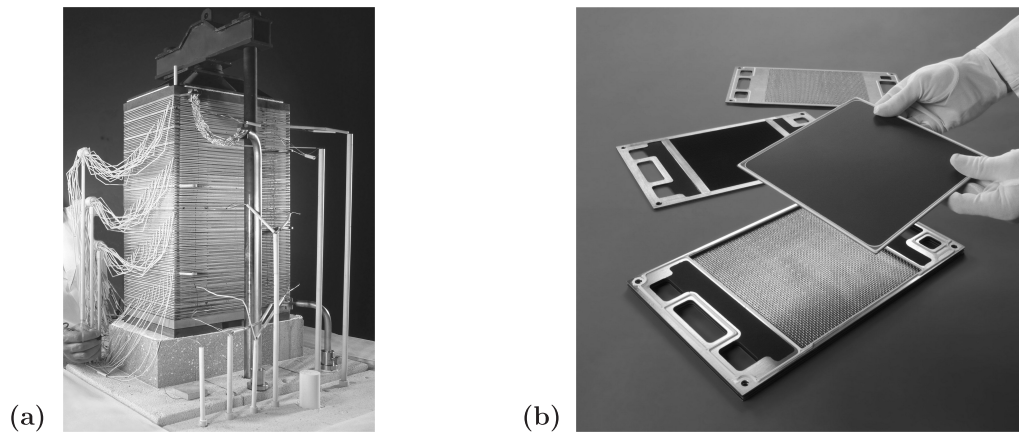
An der Kathode wird der Luftsauerstoff reduziert



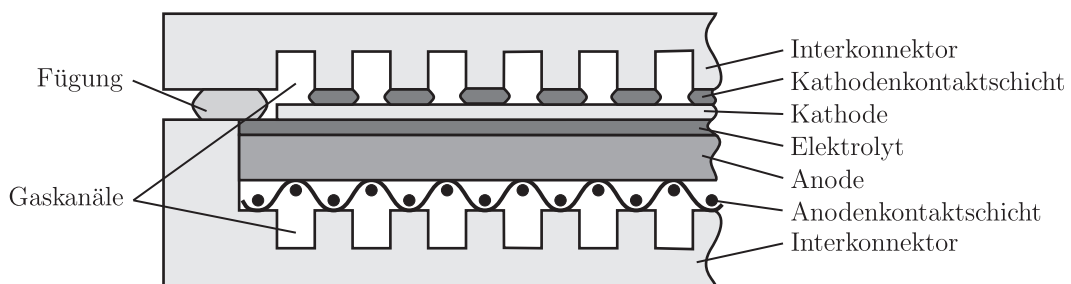
Durch die räumliche Trennung entsteht an den Elektroden ein elektrisches Potential, das durch Verbraucher genutzt werden kann. Die Betriebstemperatur der Zelle hängt neben der Ionenleitfähigkeit des Elektrolyten von der Länge des Diffusionsweges der Sauerstoffionen ab. Je länger der Diffusionsweg, desto höher ist der Innenwiderstand und damit auch die Betriebstemperatur.

<sup>7</sup>Vgl. Rietveld [204], Surdoval [223] und Ujje [235].

<sup>8</sup>Engl. „membrane electrode assembly“ (MEA).



**Bild 4.3:** SOFC-Stack (a), Hauptkomponenten (b) [Fotos: FZ Jülich].



**Bild 4.4:** Schematischer Aufbau einer SOFC-Einzelzelle.

### 4.1.2 Fügungen in SOFC-Stapeln

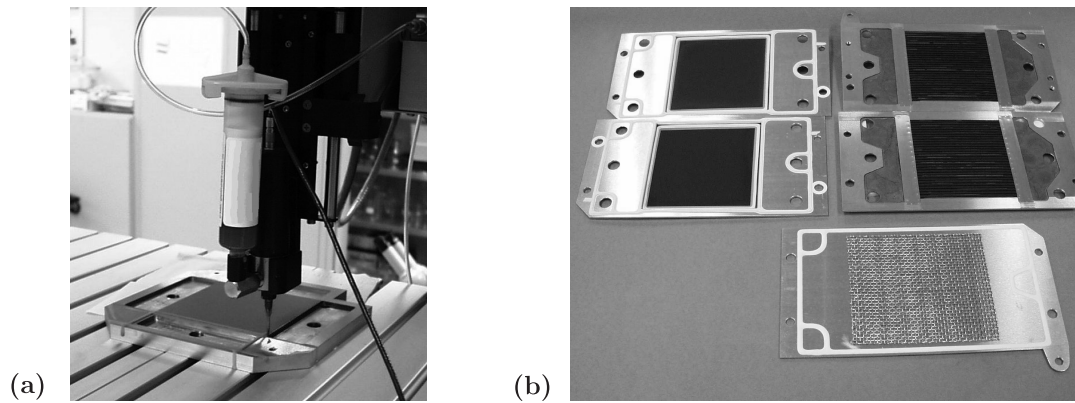
#### Aufbau

Die am Forschungszentrum Jülich entwickelten Brennstoffzellen<sup>9</sup> sind in ebener Bauweise ausgeführt. Bild 4.3a zeigt einen Zellenstapel mit einer Gesamtleistung von 13,3 kW. Die Hauptbauteile einer Zelle, die keramische MEA sowie Rahmen und Interkonnektoren aus Stahl sind in Bild 4.3b gezeigt. Neben der planaren rechteckigen Bauweise seien die planare runde, die tubulare sowie die monolithische Bauweise als mögliche Alternativen genannt.

In konventioneller planarer Bauweise ist die Elektrolytschicht die tragende Schicht des MEA-Laminats. Bei der hier betrachteten Anodensubstratbauweise trägt die dicker ausgeführte Anodenschicht zugunsten einer dünner ausgeführten Elektrolytschicht. Die resultierende geringere Diffusionsdistanz der Sauerstoffanionen ermöglicht eine deutliche Reduktion der Betriebstemperatur auf ca. 650-800°C. Bild 4.4 zeigt einen Schnitt durch eine Einzelzelle. Die Kathode besteht aus strontiumdotiertem Lanthanmanganit, der Elektrolyt aus yttriumstabilisiertem Zirkonoxid (YSZ) und die Anode aus einem YSZ-Ni-Cermet. Die MEA ist in Rahmen und Interkonnektor aus ferritischem Chromstahl<sup>10</sup> eingebettet.

<sup>9</sup>Vgl. Blum et al. [16] und Vinke et al. [239].

<sup>10</sup>1.4760 bzw. X1CrTiLa22.



**Bild 4.5:** Automatisierter Glaslotaufrag mit Dispenser (a), Einzelteile mit aufgetragenem Glaslot (b) [Fotos: FZ Jülich].

Die Kontaktschichten an Kathode ( $\text{LaCoO}_3$ ) und Anode (Ni-Netz) stellen den elektrischen Kontakt zu den Interkonnektoren her, in welche auch die Gaskanäle an den Elektroden und im Gesamtstapel integriert sind. Durch entsprechende Ausführung der Kanäle können Kreuz- Parallel- und Gegenstrombetrieb realisiert werden. Die Einzelzellen sind mit einem keramischen Glaslot aneinandergefügt und werden über die elektrisch leitenden Interkonnektoren in Reihe geschaltet. Diese periodische Anordnung wird als Brennstoffzellenstapel<sup>11</sup> bezeichnet. Die in dieser Arbeit untersuchte Glaslotfügun g nimmt zentrale Funktionen ein. Neben der Abdichtung der Gasräume und der elektrischen Isolation muss die Fügung den Zusammenhalt der Gesamtstruktur gewährleisten. Insbesondere durch das unterschiedliche thermische Ausdehnungsverhalten der Komponenten wird die Fügung, bzw. Dichtung, stark beansprucht, was zum nachfolgend näher beschriebenen Versagen führen kann. Besondere Ansprüche entstehen auch aus den Umgebungsbedingungen mit reduzierender Atmosphäre auf der Anoden- und oxidierender Atmosphäre auf der Kathodenseite. Auch alternative Dichtkonzepte wurden diskutiert. Hierzu sei insbesondere die von Wiener [246] entwickelte nachgiebige Verbunddichtung genannt, die den Abbau von Spannungen sowie eine zerstörungsfreie Demontage des Stapels ermöglicht, die in der Ausführung mit Glaslot nicht möglich ist.

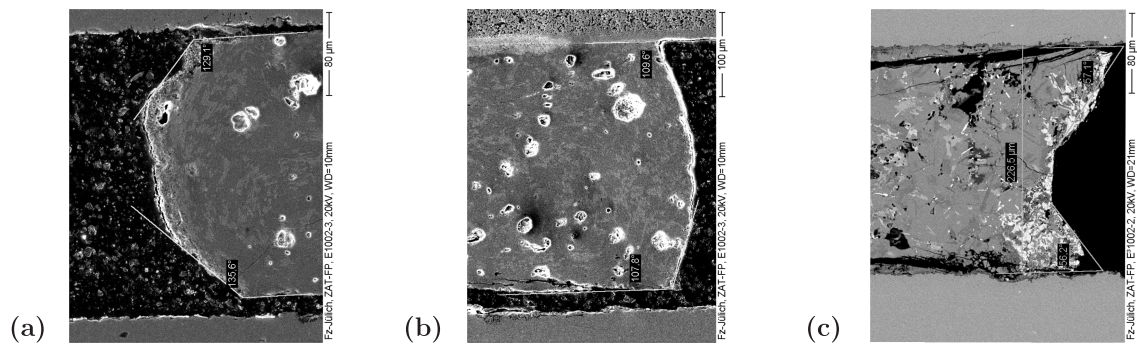
## Fertigung

Das MEA-Laminat wird in einem komplexen mehrstufigen Sinterprozess hergestellt<sup>12</sup>. Die Interkonnektoren und Rahmen werden durch entsprechende mechanische Bearbeitung hergestellt. Die Einzelzellen werden bei hohen Temperaturen in einem komplexen Fertigungsprozess zu Stapeln zusammengefügt, wobei die Fügung mit einem glaskeramischen Lot aus

<sup>11</sup>Engl. „fuel cell stack“.

<sup>12</sup>Vgl. hierzu z. B. Wanzenberg [243].





**Bild 4.6:** Querschliffbilder der Fügung eines demontierten Stapels: Außenseite (a), Innenseite (b), Außenseite (c) [Fotos: FZ Jülich].

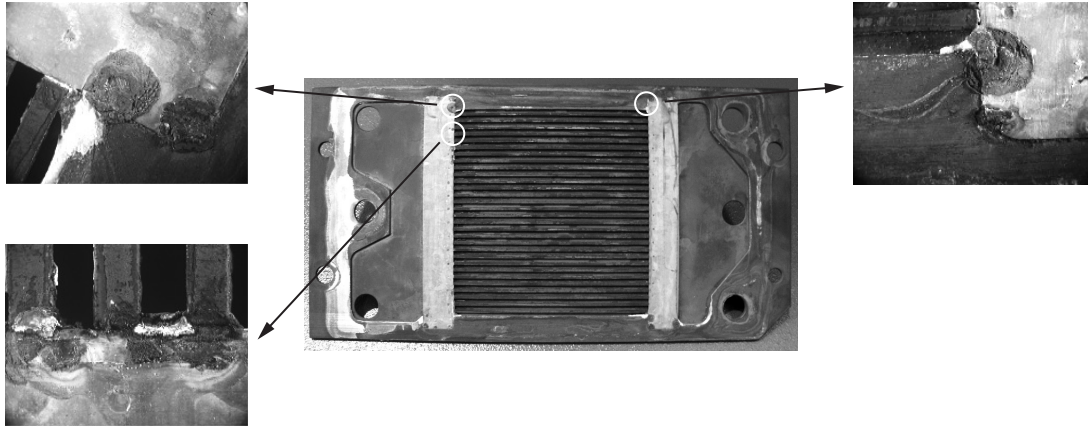
dem BCAS-System  $\text{BaO-CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$  erfolgt<sup>13</sup>. Das Glaslot besitzt einen hohen spezifischen elektrischen Widerstand, ist chemisch stabil und, soweit möglich, im Thermalausdehnungsverhalten an die anderen Bauteile, insbesondere den Interkonnektor, angepasst. Das Glas wird zu Pulver gemahlen und anschließend mit Bindemitteln und anderen Zusätzen zu Paste verarbeitet. Die Paste wird, wie in Bild 4.5a dargestellt, mittels robotergeführtem Dispenser entlang der Füglinien auf die Komponenten aufgetragen. Bei einer Zellgröße von  $200 \times 200 \text{ mm}^2$  ergibt sich so eine Dichtlänge von 2000 mm. Die Einzelteile mit aufgetragenem Glaslot sind in Bild 4.5b gezeigt. Nach der Trocknungsphase erfolgt die Assemblierung im eigentlichen Lötprozess. Dazu wird der gesamte Stapel aus den mit getrockneter Paste benetzten Komponenten aufgebaut und mit einem Gewicht beaufschlagt. Der Temperaturzyklus beginnt mit einer Haltephase bei  $350^\circ\text{C}$ , um das Bindemittel zu verbrennen. Anschließend erfolgt die Aufheizung, je nach Glaslotzusammensetzung, auf  $700\text{--}900^\circ\text{C}$  bis das Glaslot erweicht und zu schmelzen beginnt. Die benetzten Bauteile werden leicht abgekühlt und das Glas kristallisiert aus. Bei weiterer Abkühlung auf Zellbetriebstemperatur wird das NiO im Cermet der Anode zu Ni reduziert. Anschließend erfolgt die Abkühlung auf Raumtemperatur und die Inbetriebnahme.

### Beanspruchung und Versagen der Fügungen

Durch den beschriebenen Fertigungsprozess entstehen Eigenspannungen im gesamten Zellstapel. Dadurch, dass das Glaslot bei etwa  $800^\circ\text{C}$  auskristallisiert, kommt es aufgrund des unterschiedlichen Thermalausdehnungsverhaltens der Komponenten bei der Abkühlung auf Raumtemperatur zu signifikanten Spannungen. Insbesondere versucht sich das MEA-Laminat zu verkrümmen, was zu einer Verschlechterung der Kontaktierung führen kann. Um das MEA-Laminat jedoch eben zu halten, müssen durch die Fügung am Rand entsprechende Einspannmomente aufgebracht werden, die deren Beanspruchung erhöhen. Der Großteil an Eigenspannungen im Glaslot kommt jedoch durch die Dehnungsbehinderung

<sup>13</sup>Vgl. hierzu z. B. Schwickert [211].





**Bild 4.7:** Kathodenseite eines demontierten Stapels nach 1500 h Betriebszeit bei 800°C [Fotos: FZ Jülich].

im Verbund mit dem Interkonnektor zustande. Auch durch die Reduktion der Anode vor Inbetriebnahme entstehen zusätzliche Eigenspannungen. Eine weitere Beanspruchung der Struktur wird durch inhomogene Temperaturlasten sowohl im Stationärbetrieb als auch bei Lastwechseln sowie bei An- und Abfahrprozessen verursacht.

Durch die unterschiedlichen Beanspruchungen kann es zu verschiedenen mechanischen Versagensphänomenen kommen, die neben chemischen Degradationsvorgängen großen Einfluss auf die Langzeitstabilität haben. So kommt es zur Bildung von Rissen in der MEA und in den Fügungen. An den Interkonnektoren kann die Beanspruchung zu plastischen Deformationen, bei dünn ausgeführten Strukturen sogar zum Beulen führen. In der Regel versagen die Zellen nicht in einem diskreten Schadensereignis, sondern mit kontinuierlicher Leistungsabnahme. Ein Versagensmechanismus ist dabei die Bildung von Leckstellen in den Fügungen. Die Bilder 4.6a und 4.6c zeigen Querschliffbilder der Außenseite der Fügung mit der Materialabfolge Stahl-Glas-Stahl für unterschiedliche Benetzungswinkel. In Bild 4.6b ist die Innenseite der Fügung mit der von oben gezählten Materialabfolge MEA-Glas-Stahl gezeigt. Die Schäden gehen von Anfangsrissen an den Ecken der Fügung aus. Bei weiterer zyklischer Belastung wachsen die Risse unterkritisch bis es zum überkritischen Risswachstum kommt und ein lokales Leck entsteht. Leckagen führen neben einem Abfall der Zellspannung zu räumlich begrenzten Temperaturerhöhungen und damit verbundenen Folgeschäden. In Bild 4.7, das einen demontierten Stapel zeigt, sind die lokal überhitzten Stellen deutlich zu erkennen.

Eigenspannungszustände sowie Rissbildung in MEA und Fügung wurden in experimentellen Analysen von Malzbender et al. [144] untersucht. Im thermischen Zyklierbetrieb zeigte sich dabei eine deutliche Konzentration der Rissereignisse auf die Bereiche der Fügungen. Menzler et al. [150] untersuchten materielle Interaktionen im Langzeitbetrieb, insbesondere Reaktionen zwischen Interkonnektorstahl und Glaskeramik. Alle Beobachtungen flossen in die Weiterentwicklung von Materialien und Prozessen ein. Malzbender

et al. [143] zeigten experimentelle Studien zum thermischen Ausdehnungsverhalten der Glaskeramik, insbesondere eine Glasvariante mit besonders guter Anpassung an den Interkonnektorstahl. Gross et al [68] zeigten eine durch Beimischungen besonders nachgiebige Glasvariante. Auch der Ersatz von Glaslotfügungen durch metallisches Löten, vgl. Kuhn et al. [108], wurde diskutiert.

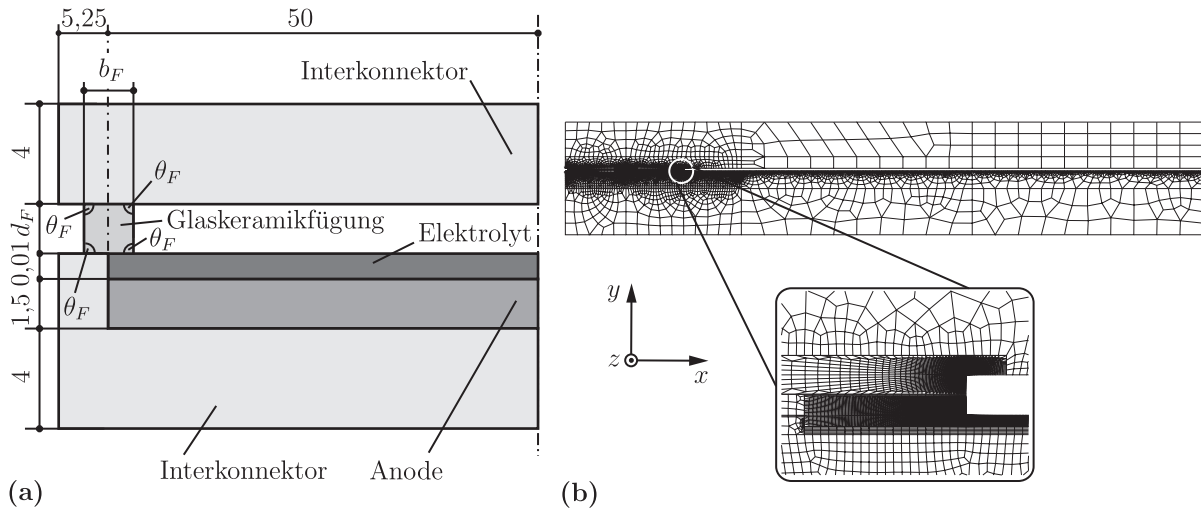
Neben experimentellen Analysen wurde das mechanische Verhalten auf Stack-, Einzelzellen- und Komponentenebene auch in Simulationen untersucht. Die Übersichtsartikel von Atkinson und Sun [8] sowie von Reifsnider et al. [202] machen die Bedeutung strukturmehchanischer Betrachtungen für eine zielführende Weiterentwicklung des Systems SOFC deutlich. Die Spannungszustände nach der Fertigung und im Betrieb wurden z. B. von Schwab [210] sowie von Müller et al. [164] untersucht. Lin et al. [138] sowie Nakajo et al. [173] simulierten Zellen mit reibschlüssigen Dichtsystemen mit entsprechenden Kontaktformulierungen. In den genannten Arbeiten erfolgt die Integritätsbewertung nur über spannungsbasierte Kriterien auf Systemebene. Zur Simulation der Rissbildung sind jedoch detailliertere Modelle erforderlich. Hierzu analysierten Nguyen et al. [175] Rissprobleme in diversen für die SOFC verwendeten Werkstoffen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, wurden von Müller [158] sowie Müller et al. [159, 160] Grenzflächenrisse in den Fügungen mit dem hybriden Versagensmodell von Leguillon [124, 125] bewertet. Die in Kapitel 2 vorgestellte neue direkte numerische Formulierung ermöglicht die Modellierung der Bildung von Rissen sowohl in der Grenzfläche als auch ins Glaslot hinein. Nachfolgend wird die Ausgangssituation analysiert und alternative Entwürfe werden untersucht.

## 4.2 Analyse des Ausgangsentwurfs

Es wird die durch den Fertigungsprozess bedingte Rissbildung in den Fügungen planarer SOFC-Stapel untersucht. Aus mechanischer Perspektive kann die Struktur als ein ebenes Laminat idealisiert werden. Durch Unterschiede in den thermoelastischen Konstanten der Schichten von MEA, Interkonnektor, Rahmen und Glaskeramikfügungen ergeben sich durch die Abkühlung von Fertigungs- auf Raumtemperatur thermisch induzierte Spannungen. Insbesondere die strukturellen und materiellen Diskontinuitäten an den freien Rändern führen zu Spannungskonzentrationen, an denen sich Risse bilden können. Das in Kapitel 2 gezeigte Versagensmodell ermöglicht die Modellierung dieser Rissbildung.

### 4.2.1 Finite-Elemente-Modellierung

Ein ebener Schnitt durch eine Einzelzelle wird als Halbmodell abgebildet. Die Abmessungen des untersuchten Entwurfs sind in Bild 4.8a dargestellt. Die Geometrie der Zelle wird im Wesentlichen durch die Dicke der Fügung  $d_F$ , deren Breite  $b_F$  sowie durch die Benet-



**Bild 4.8:** FE-Modell: Skizze (a), FE-Diskretisierung (b).

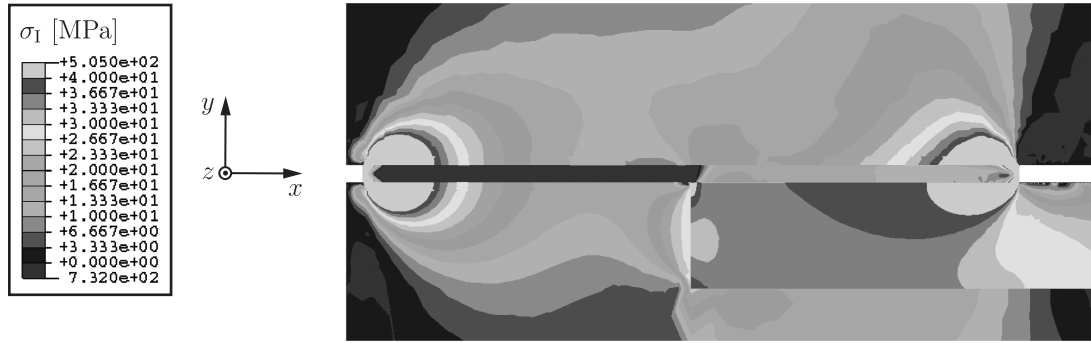
zungswinkel  $\theta_F$  der vier Ecken der Fügung beschrieben<sup>14</sup>. Die Verbindung zwischen MEA und Interkonnektor wird starr modelliert. Wie in Bild 4.8b dargestellt, wird die Struktur mit isoparametrischen Elementen im ebenen Verzerrungszustand mit jeweils vier bzw. drei Knoten diskretisiert. Das Netz der Analyseprozedur ist, wie im vergrößerten Ausschnitt gezeigt, in das Strukturnetz integriert und führt auf insgesamt ca. 300.000 Freiheitsgrade. Die vom Forschungszentrum Jülich bereitgestellten Materialdaten sind im Anhang A.3 aufgelistet.

Am rechten Rand wird die Symmetrierandbedingung  $u = 0$  vorgesehen. Zur Abbildung der periodischen Anordnung der Einzelzellen im Stack werden am oberen und unteren Rand Periodizitätsrandbedingungen für die Verschiebungscomponenten  $u$  und  $v$  formuliert. Als Referenztemperaturlast wird die fertigungsbedingte Abkühlung vom spannungsfreien Zustand bei 800°C auf 20°C untersucht.

#### 4.2.2 Bruchmechanische Bewertung

In Bild 4.9 sind die maximalen ebenen Hauptspannungen  $\sigma_I$  gezeigt. Dabei sind die Bereiche, in denen die Festigkeit von Fügung und Grenzfläche überschritten wird, deutlich erkennbar. An den Kerben liegt eine Spannungssingularität vor, deren Typ und Stärke von der Materialkombination und der Geometrie abhängt. Mit dem hybriden Versagensmodell wird nun die Kritikalität bewertet. Als Spannungsteilkriterium wurde für die Grenzflächen die Umfangsspannung  $\sigma_\varphi$  senkrecht zur Grenzfläche ausgewertet, wohingegen für das Glaslot die maximale ebene Hauptspannung  $\sigma_I$  verwendet wurde, um die Kontur  $a_c(\varphi)$  zu bestimmen.

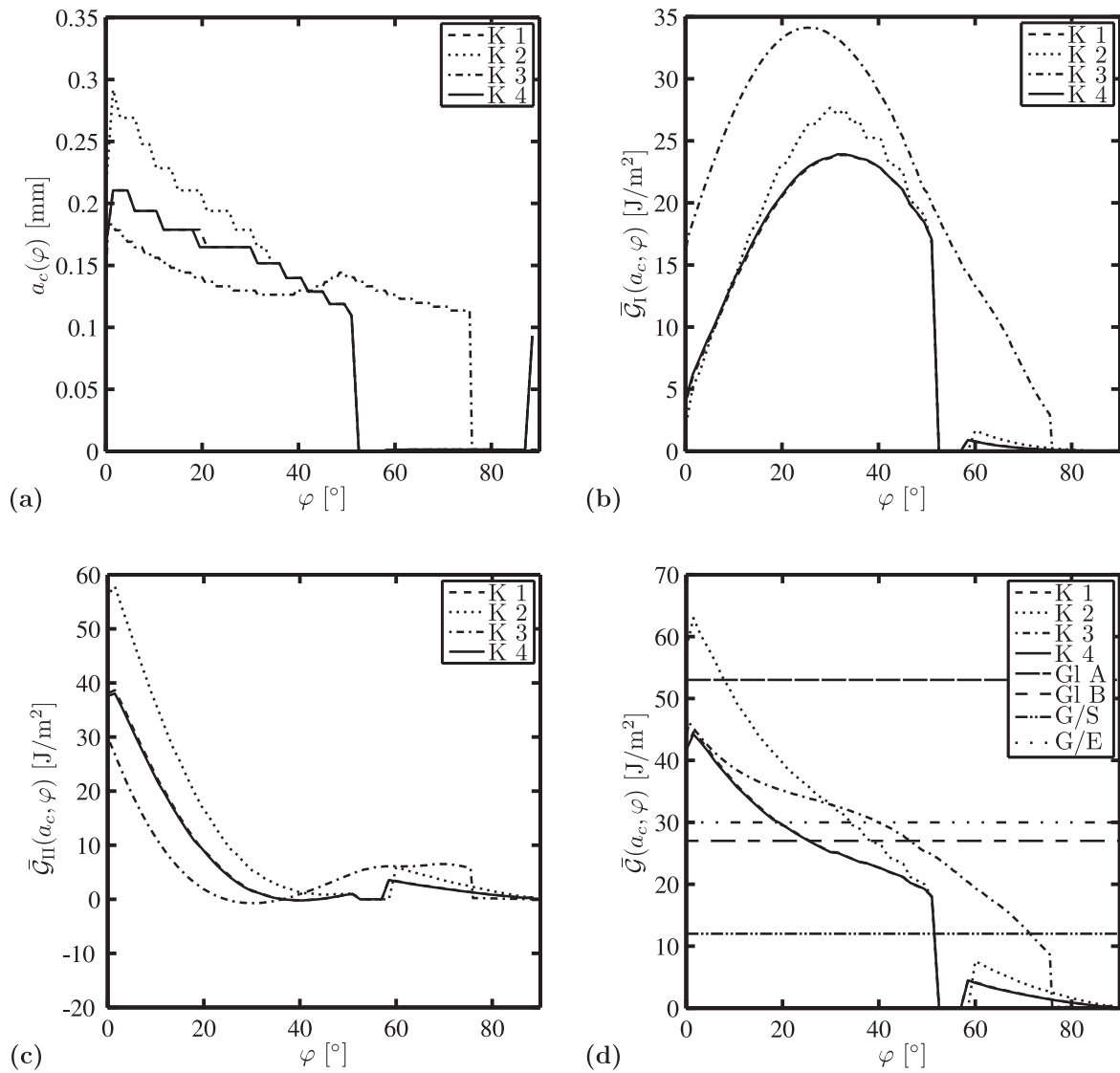
<sup>14</sup>Der Ausgangsentwurf hat die Maße  $d_F = 0,25$  mm,  $b_F = 10$  mm und  $\theta_F = 90^\circ$ .



**Bild 4.9:** Referenzlastfall: Maximale ebene Hauptspannungen  $\sigma_I$ .

Bild 4.10 zeigt eine detaillierte Analyse des Ausgangsentwurfs beim Referenzlastfall. Dargestellt sind die Funktion  $a_c(\varphi)$  in Bild 4.10a, die inkrementellen Energiefreisetzungsraten  $\bar{G}_I(a_c, \varphi)$  in Bild 4.10b und  $\bar{G}_{II}(a_c, \varphi)$  in Bild 4.10c für die Rissöffnungsmoden I und II, sowie die inkrementellen Gesamtenergiefreisetzungsraten  $\bar{G}(a_c, \varphi)$  in Bild 4.10d. Dabei sind die Kerben, wie in Bild 4.11 dargestellt, von K 1 bis K 4 bezeichnet und alle Winkel  $\varphi$  von der Grenzfläche aus beginnend mit positiver Richtung zum Glaslot hin gezählt. Bedingt durch ähnliche Konfigurationen sind die Ergebnisse für die äußeren Kerben 1 und 4 von gleicher Größenordnung. Die kritischen Risslängen  $a_c(\varphi)$  sind für die obere innere Kerbe 2 erheblich größer und für die untere innere Kerbe 3 erheblich kleiner als für die äußeren Kerben 1 und 4. Für alle Kerben liegen die Maxima der kritischen Risslängen nah an der Grenzfläche. Der Vergleich der energetischen Beiträge der Rissöffnungsmoden weist, bedingt durch die lokale Situation, eine deutliche Dominanz des Modus II auf. Das Maximum für  $\bar{G}_{II}(a_c, \varphi)$  liegt im Glaslot kurz vor der Grenzfläche, wohingegen das Maximum für  $\bar{G}_I(a_c, \varphi)$  ungefähr bei  $\varphi = 30^\circ$  liegt. Aufgrund der Dominanz des Modus II liegt das Maximum von  $\bar{G}(a_c, \varphi)$  auch im Glaslot kurz vor der Grenzfläche. An allen Grenzflächen überschreitet die Gesamtenergiefreisetzungsrate die Bruchzähigkeit. Hierbei bezeichnet G/S die kritischen Werte für die Paarung Glas-Stahl und G/E bezeichnet die Werte für die Paarung Glas-Elektrolyt. Die Linien Gl A und Gl B bezeichnen kritische Werte für verschiedene Glaskeramiken. Der Wert Gl A wird nur an Kerbe 2 überschritten, während der Wert Gl B an allen Kerben über einen weiten Winkelbereich überschritten wird. Gemäß dem vorgestellten Versagensmodell sind für die gegebene Last an allen Kerben sowohl die Glaskeramik als auch die Grenzflächen überkritisch beansprucht.

In Bild 4.12 sind die Ergebnisse für  $\bar{G}(a_c(P), \varphi_c)$  bei einer Variation der Temperaturlast  $\Delta T$  betrachtet, die mit der Referenzlast von  $\Delta T_{Ref} = -780 \text{ K}$  skaliert ist. Somit ergeben sich die Versagenslasten für die Grenzflächen an den äußeren Kerben 1 und 4 ungefähr zu  $\Delta T / \Delta T_{Ref} = 0,5$ . Für die Grenzflächen der inneren Kerben 2 und 3 liegt die Versagenslast deutlich höher bei  $\Delta T / \Delta T_{Ref} > 0,75$ . Die Reihenfolge der Versagenslasten bezüglich Rissbildung im Glaslot hängt stark von den zugrunde liegenden Materialdaten ab. Bei Annahme niedriger Bruchzähigkeitswerte wird für Kerbe 3 die höchste Versagenslast vorhergesagt und jeweils ähnliche Versagenslastniveaus für alle anderen Kerben. Bei ho-



**Bild 4.10:** Referenzlastfall: Größe der überbeanspruchten Bereiche (a), inkrementelle Energiefreisetzungsraten Modus I (b), inkrementelle Energiefreisetzungsraten Modus II (c), gesamte inkrementelle Energiefreisetzungsraten (d).

hen Bruchzähigkeitswerten ist Kerbe 2 am versagenskritischsten. Hierbei sei angemerkt, dass jede Kerbe einzeln mit ungeschädigten restlichen Kerben betrachtet wurde. Diese Konfiguration ist zur Bewertung der Bildung des ersten Anfangsrisses gerechtfertigt. Für weiterführende Szenarien müssen Anriss und eventueller Rissfortschritt an allen Kerben simultan berücksichtigt werden.

Im Betrieb wird der Stapel durch ein Belastungsgewicht von ca. 50 kg mit einer zusätzlichen vertikalen Drucklast beaufschlagt. Zur Klärung des Einflusses dieser Zusatzlast wird im Modell eine äquivalente konstante Linienlast in  $y$ -Richtung auf die Einzelzelle aufgebracht. In Bild 4.13 sind die maximalen Energiefreisetzungsraten als Funktion der mit der oben genannten Last skalierten Zug-Drucklast aufgetragen. Wie zu erwarten wird die Versagenskritikalität durch Zug erhöht und durch Druck erniedrigt. Verglichen mit

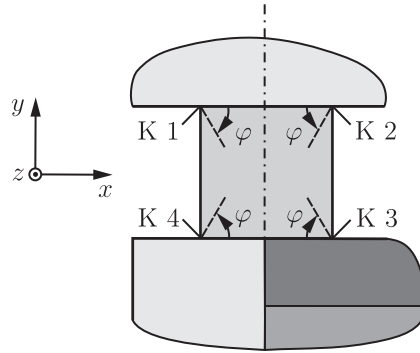
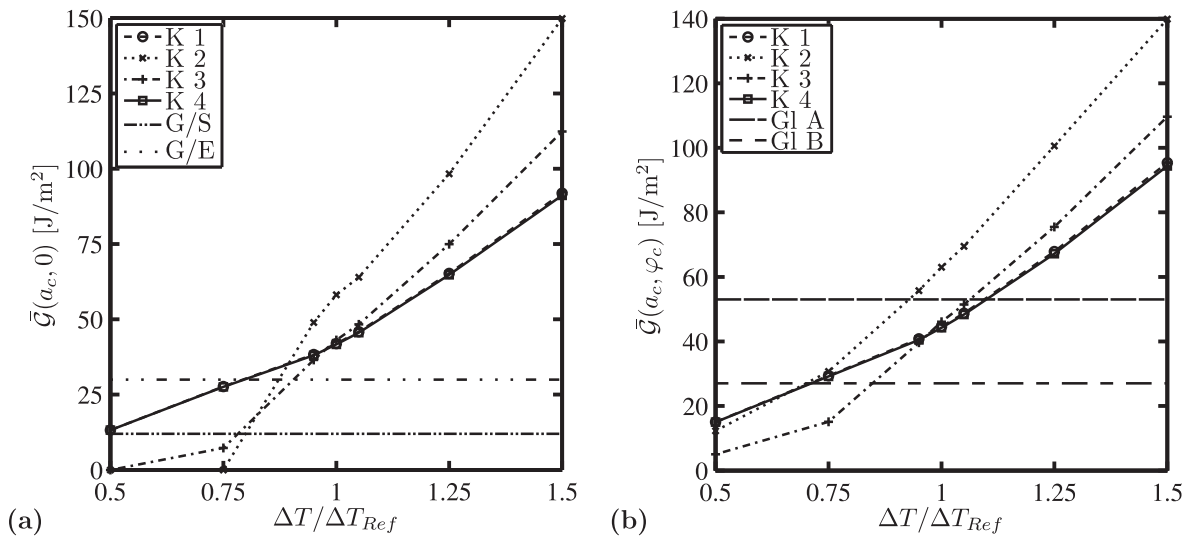


Bild 4.11: Bezeichnungen der Kerben und Winkel.

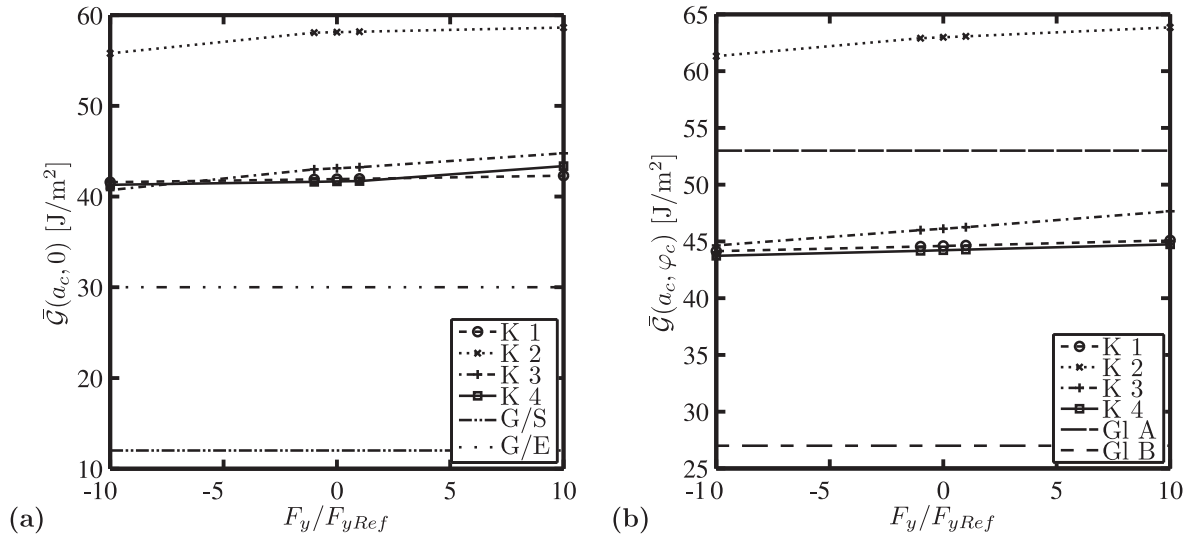
Bild 4.12: Variation der Temperaturlast:  $\bar{G}(a_c, 0)$  in Grenzfläche (a) und  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot (b).

dem Einfluss der Temperaturlast ist der Einfluss einer überlagerten Zug-Drucklast jedoch gering.

## 4.3 Analyse alternativer Entwürfe

### 4.3.1 Variation der Materialdaten

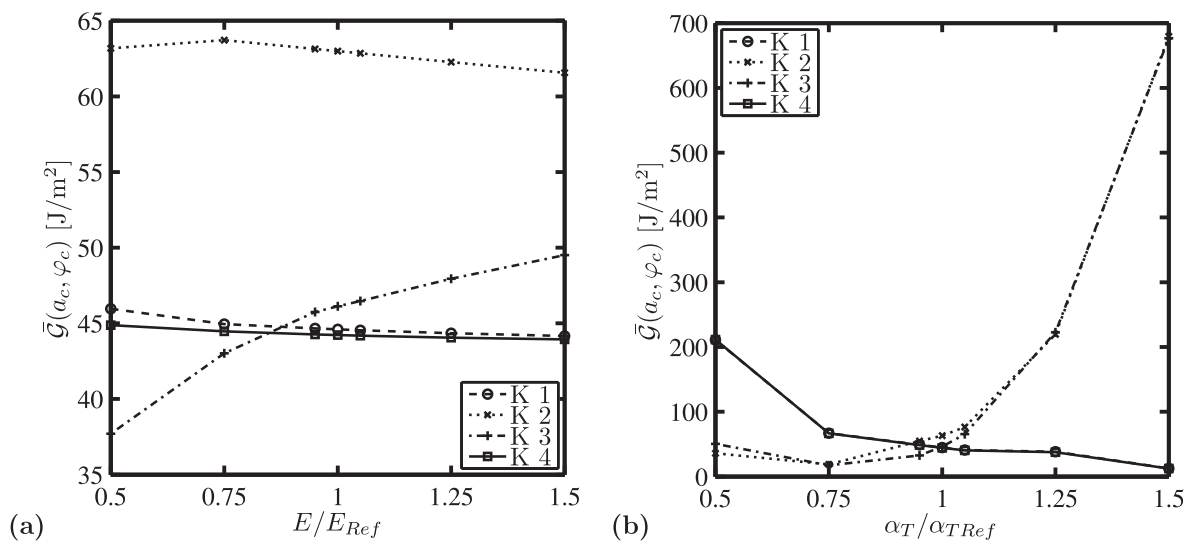
Nachdem die Versagenskritikalität des Ausgangsentwurfs deutlich aufgezeigt wurde, soll nun mögliche Abhilfe durch alternative Entwürfe untersucht werden. Ziel dabei ist eine Minimierung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$ , durch die die Versagenskritikalität im Glaslot charakterisiert wird. Weil sich die Versagenskritikalität der Grenzfläche bei diesem Problem weitgehend analog zu der des Glaslots verhält, sind im Folgenden nur Ergebnisse für Rissbildung im Glaslot dargestellt. Nachfolgend werden Ergebnisse für eine parametrische Variation der Függeometrie und der thermoelastischen



**Bild 4.13:** Variation der mechanischen Last:  $\bar{G}(a_c, 0)$  in Grenzfläche (a) und  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot (b).

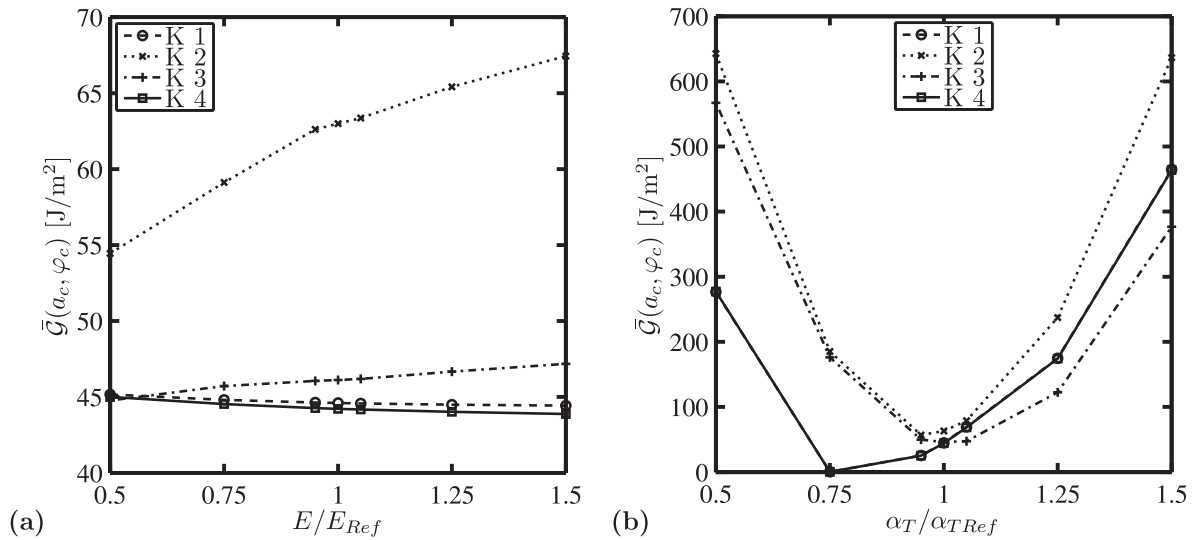
Konstanten der beteiligten Werkstoffe aufgezeigt. Die folgenden Diagramme zeigen für alle Kerben die maximale Energiefreisetzungsrate  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot als Funktion der variierten und bezüglich des Ausgangswertes normierten Parameter.

Bild 4.14 zeigt Ergebnisse für die Variation der Materialparameter der Anode. Die stärkste Sensitivität wird bezüglich einer Variation des Thermalausdehnungskoeffizienten  $\alpha_T$  beobachtet. Eine mit höheren Thermaldehnungen in der Anode einhergehende Erhöhung von  $\alpha_T$  führt zu einer Verschärfung der Situation an den beiden inneren Kerben 2 und 3, einhergehend mit einer Entschärfung an den äußeren Kerben 1 und 4. Entgegengesetzte Auswirkungen an verschiedenen Seiten resultieren aus der induzierten Biegung des MEA-Laminats. Der Einfluss des Elastizitätsmoduls  $E$  ist eine Größenordnung kleiner, auch



**Bild 4.14:** Variation des Anodenmaterials: Einfluss von  $E$  (a) und  $\alpha_T$  (b),  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot.





**Bild 4.15:** Variation des Interkonnektormaterials: Einfluss von  $E$  (a) und  $\alpha_T$  (b),  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot.

weil die Anode die weichste Komponente im Laminatsystem darstellt. Eine Erhöhung von  $E$  führt zu einer Erhöhung von  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  für die untere innere Kerbe 3 mit annähernd gleichbleibenden Werten für die anderen Kerben.

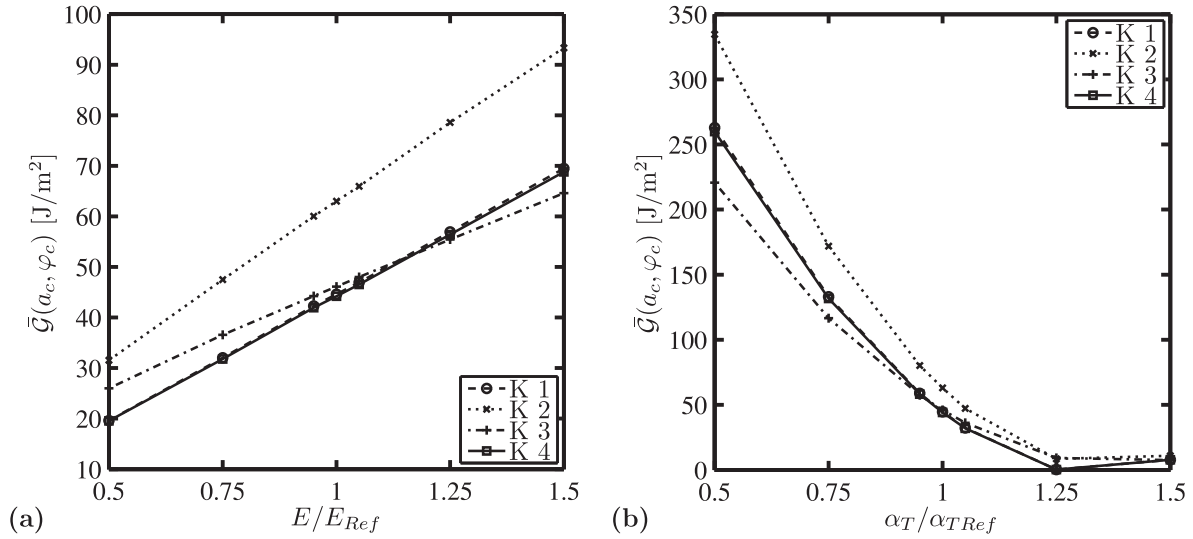
In Bild 4.15 sind Ergebnisse für variierte Materialparameter des Interkonnektorstahls dargestellt. Die im Vergleich zur Anode deutlich höheren Sensitivitäten resultieren aus der höheren Steifigkeit und dem höheren Volumenanteil am Gesamtlaminat. Ähnlich wie bei der Anode hat  $\alpha_T$  den größten Einfluss. Wie aus Bild 4.15b ersichtlich, kann durch eine Erniedrigung von  $\alpha_T$  die Versagenskritikalität deutlich gesenkt werden. Bezüglich einer Variation von  $E$  führt ein weicherer Interkonnektor zu einer Entschärfung der Situation an den Kerben 2 und 3 bei nahezu unveränderten Verhältnissen an den Kerben 1 und 4.

Bild 4.16 zeigt Ergebnisse für eine Variation der thermoelastischen Konstanten der Glas Keramik. An allen Kerben könnte durch eine Erhöhung von  $\alpha_T$  eine deutliche Entschärfung erzielt werden, was durch die experimentellen Ergebnisse von Malzbender et al. [143] bestätigt wird. Auch durch eine weichere, mit reduzierten Spannungen und Formänderungsenergien einhergehende Keramikdichtung, könnte die Ausgangssituation entschärft werden.

### 4.3.2 Variation der Függeometrie

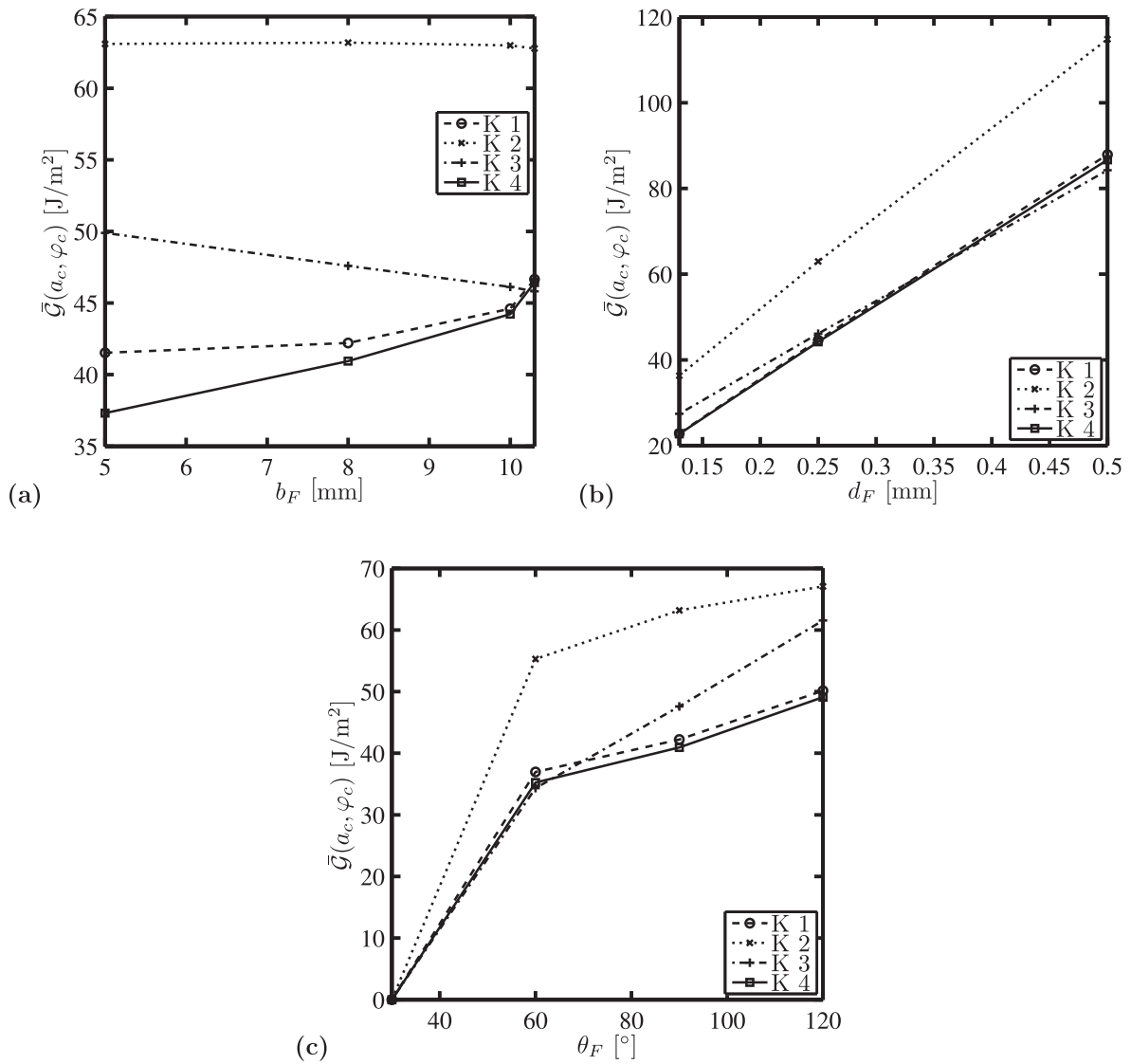
Ergänzend zu einer Variation der Materialdaten wird nun der Einfluss der Függeometrie betrachtet. In Bild 4.17a sind Ergebnisse zur Variation der Fügbreite  $b_F$  gezeigt. Insbesondere könnte für die Kerben 1 und 4 durch eine kleinere Fügbreite mit größerem Abstand vom Rand die Situation entschärft werden. Für Kerbe 3 sind die Ergebnisse gegenläufig, während die Fügbreite auf Kerbe 2 keinen Einfluss hat. Bezüglich der Dicke





**Bild 4.16:** Variation des Glaslotmaterials: Einfluss von  $E$  (a) und  $\alpha_T$  (b),  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot.

$d_F$  der Fügung zeigen die Ergebnisse in Bild 4.17b deutlich den Vorteil einer möglichst dünnen Ausführung. Dies wird auch experimentell durch Malzbender et al. [144] bestätigt. Bild 4.17c zeigt Ergebnisse für eine simultane Variation aller Kerbwinkel  $\theta_F$ . An allen Kerben kann durch einen reduzierten Fügwinkel, der durch ein verbessertes Benetzungsverhalten erreicht werden kann, die Ordnung der Spannungssingularität und damit die Versagenskritikalität deutlich entschärft werden.



**Bild 4.17:** Variation der Függeometrie: Einfluss von  $b_F$  (a),  $d_F$  (b) und  $\theta_F$  (c),  $\bar{G}(a_c, \varphi_c)$  im Glaslot.



## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse ein numerisches Modell zur Simulation spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen bereitgestellt. Die neue allgemeine direkte numerische Formulierung des hybriden Versagenskriteriums von Leguillon ermöglicht die Analyse vielfältiger Geometrien unter nahezu beliebigen thermomechanischen Belastungen. Im Rahmen der automatisierten ebenen und quasi-räumlichen Diskretisierung des Modells mit finiten Elementen für gerade, vom untersuchten Punkt ausgehende Risse können auch Grenzflächenkonfigurationen untersucht werden. Die sehr flexible Anbindung an Strukturmodelle ermöglicht auch die Analyse komplexer Bauteile. Weiterhin wurden Formulierung und algorithmische Lösung des Optimierungsproblems für die Versagenslast bereitgestellt.

Anhand experimenteller Ergebnisse an Proben aus PMMA wurde das Modell validiert. Es wurden Proben mit Spitzkerben unter gemischter Beanspruchung sowie Proben mit Kreislöchern unter uniaxialer Zugbeanspruchung untersucht. Für die Proben mit Spitzkerben wurde eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment festgestellt, auch für gemischte Beanspruchung. Dies gilt sowohl für die Versagenslast als auch für den Winkel, unter dem sich der Anriss bildet. Für die Proben mit Kreisloch haben sich jedoch die in Standardexperimenten ermittelten Werte für die Materialparameter Festigkeit und Bruchzähigkeit als schlecht auf das Problem übertragbar erwiesen. Es wurden verbesserte Parametersätze zur Abbildung des Lochgrößeneffekts ermittelt und mögliche Ursachen diskutiert.

Im Rahmen der Analyse der experimentellen Ergebnisse wurde das entwickelte Modell mit neuen und bekannten asymptotischen Lösungen verglichen. Hinsichtlich der Versagenslast und des Winkels unter dem sich der Anfangsriss bildet, wurde für die untersuchten Fälle gute Übereinstimmung zwischen asymptotischer und direkter numerischer Lösung festgestellt. Bezüglich der Länge des ersten gebildeten Risses lagen jedoch leichte Abweichungen vor. Um die Grenzen des asymptotischen Zuganges näher zu beleuchten, wurden Probengeometrien mit relativ großen Kreislöchern untersucht. Mit zunehmender relativer Lochgröße stellen sich Abweichungen in der Länge des Anfangsrisses ein, außerdem

verschwindet der Dominanzbereich des asymptotischen Spannungsfeldes. In vielen Fällen bieten die asymptotischen Lösungen jedoch eine verlässliche und numerisch effiziente Alternative zur direkten numerischen Formulierung.

Weiterhin wurde durch die quasi-räumliche Erweiterung des Modells ein neuer Zugang zur Bewertung der Delaminationskritikalität in Folge von Randeffekten an freien Komposit-Laminaträndern bereitgestellt. Die Anwendung auf als symmetrische Kreuz- und Winkelverbunde ausgeführte Zugproben aus CFK liefert ein Modell für die vom freien Rand ausgehende Delamination in Folge der theoretisch singulären interlaminaren Spannungen. Vergleiche mit Experimenten an symmetrischen Winkelverbunden unter uniaxialem Zug, bei denen Randdelaminationen zu vorzeitigem Versagen führten, zeigten gute Übereinstimmung. Sowohl der Einfluss der Einzelschichtdicken als auch der Einfluss des Lagenwinkels konnten gut abgebildet werden.

Abschließend wurde mit der Anwendung des Modells auf Randeffekte in Fügungen von Hochtemperatur-Brennstoffzellen ein erweiterter Zugang zu deren Versagen bereitgestellt und damit die Anwendbarkeit der neuen direkten numerischen Formulierung auf komplexe Bauteile demonstriert. Unter thermomechanischer Belastung konnte in dem ebenen Schnittmodell mit mehreren Kerben Rissbildung sowohl im Glaslot als auch in den Grenzflächen abgebildet werden. Ausgehend von der Analyse des Ausgangsentwurfs konnten durch die Analyse alternativer Entwürfe wesentliche Verbesserungsmöglichkeiten für das System aufgezeigt werden.

Mit der direkten numerischen Formulierung des hybriden Versagenskriteriums von Leguillon wurde in dieser Arbeit ein leistungsfähiges Analysemodell entwickelt, erprobt und angewendet. Für ebene und quasi-räumliche Probleme hat sich die FE-Implementierung des Modells zwar als numerisch aufwendig, aber, zumindest für linear-elastische Probleme, als durchaus praktikabel erwiesen. Für Spannungskonzentrationen, die die Auswertung des Modells an mehreren Punkten erfordern, z. B. elliptische Löcher oder U-Kerben unter gemischter Beanspruchung, sind zur Reduktion des Aufwandes Vereinfachungen hinsichtlich der Geometrie des gebildeten Risses empfehlenswert. Dies gilt auch für echte räumliche Probleme. Bedingt könnte Abhilfe durch spezielle numerische Verfahren wie der Randelemente-Methode<sup>1</sup> oder der erweiterten Finite-Elemente-Methode<sup>2</sup> geschaffen werden. Alternativ bieten sich Zugänge wie eine Kohäsivzonenmodellierung oder die Kontinuums-Schädigungsmechanik an. Beide Zugänge wurden im Rahmen einer studentischen Arbeit<sup>3</sup> mit der in dieser Arbeit entwickelten direkten numerischen Formulierung des hybriden Versagensmodells verglichen. Zunächst bleibt festzuhalten, dass auch für diese Modelle der numerische Aufwand nicht gering und, abhängig von der zu bewertenden Konfiguration, mit dem der direkten numerischen Auswertung des hybriden Versagensmodells durchaus vergleichbar ist. Nach der Kalibrierung anhand homogener Spannungszustände

---

<sup>1</sup>Engl. „boundary element method (BEM)“.

<sup>2</sup>Engl. „extended finite element method (XFEM)“.

<sup>3</sup>Vgl. Ackermann [2].

wurden homogene isotrope Spitzkerbscheiben sowie Scheiben mit Kreislöchern unter reiner und gemischter Beanspruchung untersucht. Für das stark lokalisierte Spannungsfeld an Spitzkerben wurde unter reiner Zugbeanspruchung zwischen allen Zugängen gute Übereinstimmung festgestellt, die mit zunehmend gemischter Beanspruchung, bzw. abnehmender Lokalisierung an stumpfen Kerben oder Kreislöchern abnahm. Der Abgleich der Modelle untereinander und insbesondere deren Anpassung an breite experimentelle Befunde sollte im Rahmen weiterführender experimenteller und theoretischer Arbeiten geklärt werden.

Neben der Weiterentwicklung numerischer Zugänge ist aufgrund ihrer Effizienz auch die Entwicklung analytischer asymptotischer Zugänge lohnenswert. Wie in dieser Arbeit gezeigt, sind diese auch in vielen Fällen gut anwendbar. Zur weiteren Validierung der Theorie sollte insbesondere die Bedeutung der finiten Rissbildung experimentell überprüft werden. Dies könnte durch Experimente an Proben geschehen, die ein stabiles Risswachstum und somit die Bestimmung der Anfangsrisslänge ermöglichen. Weiterhin wären Erweiterungen auf inelastische und dynamische Probleme von Interesse. Zum Beispiel könnte durch Einbeziehung dissipativer Terme aufgrund von Rissuferkontakt in die Energiebilanz auch Druck- bzw. Schubversagen modelliert werden. Im Rahmen einer studentischen Arbeit<sup>4</sup> wurde das Modell auf inelastische Probleme erweitert und anhand elastisch-plastischer Rissprobleme überprüft. Für einen halbunendlichen Riss in der unendlichen Ebene mit erweitertem asymptotischem linear-elastischem Modus I-Fernfeld wurde der Einfluss des ersten nichtsingulären Terms der Entwicklung (1.104) auf die effektive Bruchzähigkeit überprüft. Jedoch konnten experimentelle Ergebnisse an Proben aus einem ferritischen Stahl mit unterschiedlichen Constraintsituationen<sup>5</sup> nicht ausreichend abgebildet werden. Zur Beschreibung der Abhängigkeit der Bruchzähigkeit vom Constraint sind also andere verfeinerte Modelle erforderlich. Schließlich erscheinen auch weitere anisotrope Verallgemeinerungen des Modells lohnenswert. Durch geeignet gewählte, auf mikromechanischen Überlegungen beruhende, Festigkeits- und Energiekriterien könnte so zum Beispiel im Rahmen einer Laminattheorie die Rissbildung simuliert und damit eine weitere Problemklasse erschlossen werden.

---

<sup>4</sup> Vgl. Fahlbusch [50].

<sup>5</sup>Vgl. Hebel et al. [86] sowie Hohe et al. [93, 94].



# Anhang A

## Materialdaten

### A.1 PMMA

**Tabelle A.1:** Materialdaten für PMMA.

| Ref.  | $E$ [MPa] | $\nu$ [-] | $\sigma_c$ [MPa] | $\mathcal{G}_c$ [J/m <sup>2</sup> ] |
|-------|-----------|-----------|------------------|-------------------------------------|
| [137] | 3000      | 0,36      | 72,0             | 290,0                               |
| [251] | 3100      | 0,36      | 111,8            | 368,3±70,4                          |
| [214] | 3300      | 0,35      | 102,8            | 384,2                               |

### A.2 CFK

Materialdaten für T800/epoxy:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 135000 \text{ MPa}, E_2 = 9400 \text{ MPa}, E_3 = 9400 \text{ MPa}, \\
 G_{12} &= 4850 \text{ MPa}, G_{13} = 4850 \text{ MPa}, G_{23} = 3240 \text{ MPa}, \\
 \nu_{12} &= 0,35, \nu_{13} = 0,35, \nu_{23} = 0,48, \\
 \alpha_1 &= -0,6 \cdot 10^{-6}/\text{K}, \alpha_2 = 30 \cdot 10^{-6}/\text{K}, \alpha_3 = 30 \cdot 10^{-6}/\text{K}, \\
 R_{\parallel}^+ &= 2800 \text{ MPa}, R_{\parallel}^- = 2800 \text{ MPa}, R_{\perp}^+ = 55 \text{ MPa}, R_{\perp}^- = 170 \text{ MPa}, R_{\perp\parallel} = 90 \text{ MPa}.
 \end{aligned}$$

Interfacefestigkeiten und -bruchzähigkeiten zwischen Schichten aus T800/epoxy:

$$\sigma_c = 10 \text{ MPa}, \tau_c = 10 \text{ MPa}, \mathcal{G}_c = 140 \text{ J/m}^2.$$



### A.3 SOFC-Werkstoffe

**Tabelle A.2:** Thermoelastische Konstanten.

| Werkstoff                              | $T$ [°C] | $E$ [MPa] | $\nu$ | $\alpha_T$ [ $10^{-6}\text{K}^{-1}$ ] |
|--|----------|-----------|-------|---------------------------------------|
| Anode<br>(reduziert)                   | 20       | 36000     | 0,30  | 10,2                                  |
|  | 800      | 18000     |       | 12,7                                  |
|  | 1200     |           |       | 12,7                                  |
| Elektrolyt                             | 20       | 210000    | 0,25  | 10,5                                  |
|  | 800      | 105000    |       | 10,5                                  |
|  | 1000     |           |       | 10,9                                  |
| Crofer 22 APU                          | 20       | 218000    | 0,30  | 9,0                                   |
|  | 100      |           |       | 9,0                                   |
|  | 300      | 200000    |       | 10,0                                  |
|  | 500      | 185000    |       | 11,0                                  |
|  | 700      |           |       | 11,5                                  |
|  | 800      | 140000    |       |                                       |
|  | 900      |           |       | 12,5                                  |
| Glaslot<br>(kristallin)                | 20       | 75000     | 0,30  | 6,0                                   |
|  | 100      |           |       | 6,0                                   |
|  | 200      |           |       | 6,5                                   |
|  | 400      |           |       | 7,5                                   |
|  | 700      |           |       | 8,5                                   |
|  | 800      |           |       | 8,8                                   |
| Bezugstemperatur für $\alpha_T$ : 20°C |          |           |       |                                       |

**Tabelle A.3:** Festigkeiten und Risswiderstände bei Raumtemperatur.

| Komponente      | $\sigma_c$ [MPa] | $\mathcal{G}_c$ [J/m <sup>2</sup> ] |
|-----------------|------------------|-------------------------------------|
| Glaslot A       | 32,1             | 27                                  |
| Glaslot B       | 32,1             | 53                                  |
| Glas-Stahl      | 36,0             | 12                                  |
| Glas-Elektrolyt | 36,0             | 30                                  |

# Literaturverzeichnis

- [1] ABE, S. ; KAGEYAMA, K. ; OHSAWA, I. ; KANAI, M. ; KATO, T.: Analytical prediction and experiment of transverse lamina cracking in multidirectionally reinforced symmetric laminates. In: *Proceedings of the 7<sup>th</sup> Japan International SAMPE Symposium & Exhibition – Information and Innovation in Composites Technologies*, 2001, S. 817–820
- [2] ACKERMANN, M.: *Vergleichende Bewertung von Modellierungsansätzen für spröde Rissinitiierung an Spannungskonzentrationen*, FG Strukturmechanik, TU Darmstadt, Diplomarbeit, 2007
- [3] AKISANYA, A. R. ; MENG, C. S.: Initiation of fracture at the interface corner of bi-material joints. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (2003), Nr. 1, S. 27–46
- [4] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; KISSING, W.: *Mechanics of Composite Structural Elements*. Berlin · Heidelberg · New York : Springer-Verlag, 2004
- [5] ANDERSON, T.L.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. III. Aufl. Boca Raton : CRC Press, 2005
- [6] ANDERSONS, J. ; MODNIKS, J. ; LETERRIER, Y. ; TORNARE, G. ; DUMONT, P. ; MANSON, J. A. E.: Evaluation of toughness by finite fracture mechanics from crack onset strain of brittle coatings on polymers. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 49 (2008), Nr. 2, S. 151–157
- [7] ANDERSONS, J. ; TARASOV, S. ; SPĀRŅINŠ, E.: Finite fracture mechanics analysis of crack onset at a stress concentration in a UD glass/epoxy composite in off-axis tension. In: *Composites Science and Technology* 70 (2010), Nr. 9, S. 1380–1385
- [8] ATKINSON, A. ; SUN, B.: Residual stress and thermal cycling of planar solid oxide fuel cells. In: *Materials Science and Technology* 23 (2007), Nr. 10, S. 1135–1143
- [9] AVESTON, J. ; KELLY, A.: Theory of multiple fracture of fibrous composites. In: *Journal of Materials Science* 8 (1973), Nr. 3, S. 352–362

- [10] AYATOLLAHI, M. R. ; TORABI, A. R.: A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 12, S. 1883–1896
- [11] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. II. Aufl. Berlin · Heidelberg · New York : Springer-Verlag, 2002
- [12] BAŽANT, Z. P. ; PLANAS, J.: *Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials*. Boca Raton : CRC Press LLC, 1998
- [13] BECKER, W.: A complex potential method for plate problems with bending extension coupling. In: *Archive of Applied Mechanics* 61 (1991), Nr. 5, S. 318–326
- [14] BECKER, W.: *Beiträge zur analytischen Behandlung ebener Laminate*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1993 (Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 121)
- [15] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin · Heidelberg · New York : Springer-Verlag, 2002
- [16] BLUM, L. ; BUCHKREMER, H.-P. ; STEINBRECH, R. W. ; HAART, B. de ; REISGEN, U. ; STEINBERGER-WILCKENS, R.: Current trends of SOFC development at Forschungszentrum Juelich. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [17] BOGY, D. B.: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 3, S. 460–466
- [18] BOGY, D. B.: On the problem of edge-bonded elastic quarterplanes loaded at the boundary. In: *International Journal of Solids and Structures* 6 (1970), S. 1287–1313
- [19] BOGY, D. B.: Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. In: *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), S. 377–386
- [20] BOGY, D. B.: The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), Nr. 4, S. 1103–1109
- [21] BOSSEL, U.: *The Birth of the Fuel Cell*. European Fuel Cell Forum, Oberrohrdorf, 2000
- [22] BOURDIN, B. ; FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: Numerical experiments in revisited brittle fracture. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), S. 797–826
- [23] BROEK, D.: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. IV. Aufl. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1986

- [24] BROEK, D.: *The Practical Use of Fracture Mechanics*. II. Aufl. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989
- [25] CAMPILHO, R. D. S. G. ; MOURA, M. F. S. F. de ; DOMINGUES, J. J. M. S.: Modelling single and double-lap repairs on composite materials. In: *Composites Science and Technology* 65 (2005), Nr. 13, S. 1948–1958
- [26] CARPINTERI, A. (Hrsg.): *Size-scale effects in the failure mechanisms of materials and structures*. London : E & FN Spon, 1996
- [27] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; SAPORA, A. ; TAYLOR, D.: A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 7, S. 1736–1752
- [28] CARRERE, N. ; VANDELLOS, T. ; MARTIN, E.: Multilevel analysis of delamination initiated near the edges of composite structures. In: BANKS, W. M. (Hrsg.) ; WISNOM, M.R. (Hrsg.): *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials (ICCM-17), 2009, July 27 – 31, Edinburgh, UK* The British Composites Society (Veranst.), CD-ROM, 2009
- [29] CHAO, Y. J. ; LIU, S. ; BROVIK, B. J.: Brittle fracture: Variation of fracture toughness with constraint and crack curving under mode I conditions. In: *Experimental Mechanics* 41 (2001), Nr. 3, S. 232–241
- [30] CHAO, Y. J. ; YANG, S. ; SUTTON, M. A.: On the fracture of solids characterized by one or two parameters - Theory and practice. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (1994), Nr. 4, S. 629–647
- [31] CHEN, D. H. ; OZAKI, S.: Investigation of failure criteria for a sharp notch. In: *International Journal of Fracture* 152 (2008), S. 63–74
- [32] CHUE, C. H. ; CHEN, T. H. ; LEE, H. T.: A general solution on stress singularities in the junction of two anisotropic materials. In: *Composite Structures* 55 (2002), Nr. 1, S. 81–93
- [33] CHUE, C. H. ; LIU, C. I.: A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 38-39, S. 6889–6906
- [34] CLARIN, P. G.: Wedge notch sensitivity of linearly softening materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 29 (1988), Nr. 5, S. 527–533
- [35] CLARK, J. D. ; MCGREGOR, I. J.: Ultimate tensile stress over a zone – A new failure criterion for adhesive joints. In: *Journal of Adhesion* 42 (1993), Nr. 4, S. 227–245

- [36] CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; CARPINTERI, A. ; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: A coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, S. 2021–2033
- [37] CORNETTI, P. ; TAYLOR, D. ; CARPINTERI, A.: An asymptotic matching approach to shallow-notched structural elements. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), S. 348–358
- [38] CROCOMBE, A. D. ; RICHARDSON, G. ; SMITH, P. A.: A unified approach for predicting the strength of cracked and non-cracked adhesive joints. In: *Journal of Adhesion* 49 (1995), Nr. 3-4, S. 211–244
- [39] CUNTZE, R. G.: The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multi-directional laminates - Part B. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 3-4, S. 487–516
- [40] CUNTZE, R. G.: Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 7-8, S. 1081–1096
- [41] CUNTZE, R. G. ; FREUND, A.: The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 3-4, S. 343–377
- [42] DAVENPORT, J. C. W. ; SMITH, D. J.: A study of superimposed fracture mode-I, mode-II and mode-III on PMMA. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 16 (1993), Nr. 10, S. 1125–1133
- [43] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. In: *Journal of Elasticity* 9 (1979), Nr. 4, S. 373–391
- [44] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge. In: *Journal of Elasticity* 11 (1981), Nr. 3, S. 317–327
- [45] DU, Z. Z. ; HANCOCK, J. W.: The effect of nonsingular stresses on crack-tip constraint. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991), Nr. 4, S. 555–567
- [46] DUNDURS, J.: Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969), Nr. 3, S. 650–652
- [47] DUNN, M. L. ; SUWITO, W. ; CUNNINGHAM, S.: Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities. In: *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), Nr. 29, S. 3873–3883

- [48] DUNN, M. L. ; SUWITO, W. ; CUNNINGHAM, S. ; MAY, C. W.: Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading. In: *International Journal of Fracture* 84 (1997), S. 367–381
- [49] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie. Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. III. Aufl. Mannheim : B. I. Wissenschaftsverlag, 1993
- [50] FAHLBUSCH, N.-C.: *Modellierung elastisch-plastischer Rissprobleme mit der Bruchmechanik finiter Risse*, FG Strukturmechanik, TU Darmstadt, Abschlussarbeit (B. Sc.), 2009
- [51] FAN, H. B. ; CHUNG, P. W. K. ; YUEN, M. M. F. ; CHAN, P. C. H.: An energy-based failure criterion for delamination initiation in electronic packaging. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 19 (2005), Nr. 15, S. 1375–1386
- [52] FETT, T.: Failure of brittle materials near stress singularities. In: *Engineering Fracture Mechanics* 53 (1996), Nr. 4, S. 511–518
- [53] FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998), Nr. 8, S. 1319–1342
- [54] FREED, Y. ; BANKS-SILLS, L.: A new cohesive zone model for mixed mode interface fracture in bimetals. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 15, S. 4583–4593
- [55] GDOUTOS, E. E.: *Fracture Mechanics: An Introduction*. II. Aufl. Dordrecht : Springer, 2005
- [56] GLEICH, D. M. ; TOOREN, M. J. L. van ; BEUKERS, A.: A stress singularity approach to failure initiation in a bonded joint with varying bondline thickness. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 15 (2001), Nr. 10, S. 1247–1259
- [57] GOLAND, M. ; REISSNER, E.: The stresses in cemented joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944), Nr. 1, S. 17
- [58] GÓMEZ, F. J. ; ELICES, M.: Fracture of components with V-shaped notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), S. 1913–1927
- [59] GÓMEZ, F. J. ; ELICES, M.: Fracture loads for ceramic samples with rounded notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2006), S. 880–894
- [60] GÓMEZ, F. J. ; ELICES, M. ; BERTO, F. ; LAZZARIN, P.: Local strain energy to assess the static failure of U-notches in plates under mixed mode loading. In: *International Journal of Fracture* 145 (2007), S. 29–45

- [61] GÓMEZ, F. J. ; ELICES, M. ; BERTO, F. ; LAZZARIN, P.: Fracture of V-notched specimens under mixed mode (I + II) loading in brittle materials. In: *International Journal of Fracture* 159 (2009), Nr. 2, S. 121–135
- [62] GÓMEZ, F. J. ; GUINEA, G. V. ; ELICES, M.: Failure criteria for linear elastic materials with U-notches. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), S. 99–113
- [63] GRADIN, P. A.: A fracture criterion for edge-bonded bimaterial bodies. In: *Journal of Composite Materials* 16 (1982), S. 448–456
- [64] GREEN, A. E. ; ZERNA, W.: *Theoretical elasticity*. II. Aufl. Mineola : Dover Publications, 2002
- [65] GRENESTEDT, J. L. ; HALLSTROM, S.: Crack initiation from homogeneous and bimaterial corners. In: *Journal of Applied Mechanics* 64 (1997), S. 811–818
- [66] GRENESTEDT, J. L. ; HALLSTRÖM, S. ; KUTTENKEULER, J.: On cracks emanating from wedges in expanded PVC foam. In: *Engineering Fracture Mechanics* 54 (1996), Nr. 4, S. 445–456
- [67] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. IV. Aufl. Berlin · Heidelberg · New York : Springer, 2007
- [68] GROSS, S. M. ; KOPPITZ, T. ; REMMEL, J. ; BOUCHE, J.-B.: Joining properties of a composite glass-ceramic sealant. In: KILNER, J. A. (Hrsg.): *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2006
- [69] HACKETT, E.M. (Hrsg.) ; SCHWALBE, K.H. (Hrsg.) ; DODDS, R.H. (Hrsg.): *Constraint effects in fracture, ASTM STP 1171*. Philadelphia : American Society for Testing and Materials, 1993
- [70] HAHN, H. G.: *Bruchmechanik: Einführung in die theoretischen Grundlagen*. Stuttgart : Teubner, 1976
- [71] HAHN, H. G.: *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1985
- [72] HARRY, R. ; LÉCUYER, F. ; MARION, G.: Détection expérimentale de l’amorçage du délaminage de stratifiés à l’aide de l’émission acoustique. In: LAMON, J. (Hrsg.) ; BAPTISTE, D. (Hrsg.): *Comptes rendus des onzièmes journées nationales sur les composites*. Paris : AMAC, 1998, S. 787–795
- [73] HART-SMITH, L. J.: Adhesive-bonded double-lap lap joints, CR 112235 / NASA, Langley Research Center. 1973. – Forschungsbericht

- [74] HART-SMITH, L. J.: Adhesive-bonded single lap joints, CR 112236 / NASA, Langley Research Center. 1973. – Forschungsbericht
- [75] HARTRANFT, R. J. ; SIH, G. C.: Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. In: *Journal of Mathematics and Physics* 47 (1968), S. 276–291
- [76] HARTRANFT, R. J. ; SIH, G. C.: Stress singularity for a crack with an arbitrarily curved front. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), Nr. 3, S. 705–718
- [77] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, S. 1129–1145
- [78] HATTORI, T.: A stress-singularity-parameter approach for evaluating the adhesive strength of single-lap joints. In: *JSME International Journal. Series I, Solid Mechanics, Strength of Materials* 34 (1991), Nr. 3, S. 326–331
- [79] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Modelling crack initiation by means of finite fracture mechanics. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 6, 2006, S. 169–170
- [80] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Modellierung von Sprödbruchinitiierung an Kerben und Fügungen. In: KLINGAUF, U. (Hrsg.): *Tagungsband des deutschen Luft- und Raumfahrtkongresses 2008, September 23–25, Darmstadt, Germany*, CD-ROM, 2008
- [81] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), S. 1–11
- [82] HEBEL, J. ; BECKER, W. ; HAART, L. G. J. de ; GUBNER, A. ; STEINBRECH, R.W.: Integrity assessment of ceramic sealing joints. In: KILNER, J. A. (Hrsg.): *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2006
- [83] HEBEL, J. ; BECKER, W. ; LEGUILLON, D. ; YOSIBASH, Z.: Failure analysis of brittle elastic notched structures utilising finite fracture mechanics procedures. In: POKLUDA, J. (Hrsg.) ; LUKÁŠ, P. (Hrsg.) ; ŠANDERA, P. (Hrsg.) ; DLOUHÝ, I. (Hrsg.): *Proceedings of the 17<sup>th</sup> European Conference on Fracture ECF 17, September 2–5, Brno, Czech Republic*, CD-ROM, 2008, S. 718–725
- [84] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle failure in notched structures by means of a finite fracture mechanics model. In: ELBOUJDANI, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Fracture ICF XII, July 12–17, 2009, Ottawa, Canada*, CD-ROM, 2009



- [85] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Modelling brittle failure initiation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* (2010). – Im Druck
- [86] HEBEL, J. ; HOHE, J. ; FRIEDMANN, V. ; SIEGELE, D.: Experimental and numerical analysis of in-plane and out-of-plane constraint characterization by secondary fracture parameters. In: *International Journal of Fracture* 146 (2007), S. 173–188
- [87] HEINZEL, A. (Hrsg.) ; MAHLENDORF, F. (Hrsg.) ; ROES, J. (Hrsg.): *Brennstoffzellen – Entwicklung, Technologie, Anwendung*. III. Aufl. Heidelberg : C. F. Müller, 2006
- [88] HENNINGER, C. ; LEGUILLON, D.: Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings. In: *Journal of Thermal Stresses* 31 (2008), Nr. 1, S. 59–76
- [89] HENNINGER, C. ; LEGUILLON, D. ; MARTIN, E.: Crack initiation at a V-notch – comparison between a brittle fracture criterion and the Dugdale cohesive model. In: *Comptes Rendus Mécanique* 335 (2007), Nr. 7, S. 388–393
- [90] HERAKOVICH, C. T.: *Handbook of Composites – Structure and Design*. Bd. 2. Kap. Free edge effects in laminated composites, S. 187–230, Elsevier Science Publishers B. V., 1989
- [91] HERTZBERG, R.W.: *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. IV. Aufl. New York : Wiley, 1996
- [92] HILLERBORG, A. ; MODÉER, M. ; PETERSSON, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* 6 (1976), S. 773–782
- [93] HOHE, J. ; HEBEL, J. ; FRIEDMANN, V. ; SIEGELE, D.: Probabilistic failure assessment of ferritic steels using the master curve approach including constraint effects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 1274–1292
- [94] HOHE, J. ; HEBEL, J. ; SIEGELE, D.: Two parameter approaches in the probabilistic failure assessment of ferritic steels. In: CARPINTERI, A. (Hrsg.): *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Fracture ICF XI, March 20–25, 2005, Turin, Italy*, CD-ROM, 2005
- [95] HUSSAIN, M. A. ; PU, S. L. ; UNDERWOOD, J.: Strain energy release rate for a crack under combined mode-I and -II. In: SIH, G. C. (Hrsg.): *Fracture Analysis: Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II, ASTM STP 560*. Philadelphia : American Society for Testing and Materials, 1974, S. 2–28
- [96] IANCU, O. T. ; FETT, T. ; MUNZ, D.: A fracture mechanical treatment of free edge stress singularities applied to a brazed ceramic metal compound. In: *International Journal of Fracture* 46 (1990), Nr. 3, S. 159–172

- [97] JONES, R. M.: *Mechanics of Composite Materials*. II. Aufl. Philadelphia · London : Taylor & Francis, 1999
- [98] KANNINEN, M. F. ; POPELAR, C.L.: *Advanced Fracture Mechanics*. New York : Oxford University Press, 1985
- [99] KANT, T. ; SWAMINATHAN, K.: Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - A selective review and survey of current developments. In: *Composite Structures* 49 (2000), Nr. 1, S. 65–75
- [100] KENZEL, L.: <http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchtrennen>. 2010. – 21.01.2010
- [101] KIENZLER, R.: *Konzepte der Bruchmechanik: Integrale Bruchkriterien*. Braunschweig · Wiesbaden : Vieweg, 1993
- [102] KIM, R. Y. ; SONI, S. R.: Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites. In: *Journal of Composite Materials* 18 (1984), Nr. 1, S. 70–80
- [103] KIM, S. R. ; NAIRN, J. A.: Fracture mechanics analysis of coating/substrate systems part I: Analysis of tensile and bending experiments. In: *Engineering Fracture Mechanics* 65 (2000), Nr. 5, S. 573–593
- [104] KIMOTO, H. ; USAMI, S. ; MIYATA, H.: Flaw size dependence in fracture stress of glass and polycrystalline ceramics. In: *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. A* 51 (1985), Nr. 471, S. 2482–2488
- [105] KIRK, M. (Hrsg.) ; BAKKER, A. (Hrsg.): *Constraint effects in fracture – Theory and applications, ASTM STP 1244*. Bd. 2. West Conshohocken : American Society for Testing and Materials, 1995
- [106] KIRSCH, G.: Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. In: *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 42 (1898), S. 797–807
- [107] KRUEGER, R.: Virtual crack closure technique: History, approach and applications. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 2, S. 109–143
- [108] KUHN, B. J. ; WETZEL, F. J. ; STEINBRECH, R. W. ; MALZBENDER, J. ; SINGHEISER, L.: Mechanical characterization of brazed ceramic/metal joints for SOFC stacks. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [109] KUHN, C. ; MÜLLER, R.: A phase field model for fracture. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 8, 2008, S. 10223–10224
- [110] KUHN, C. ; MÜLLER, R.: A continuum phase field model for fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* (2010). – Im Druck

- [111] KULLMER, G. ; RICHARD, H. A.: Influence of the root radius of crack-like notches on the fracture load of brittle components. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), S. 711–723
- [112] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen: Finite Elemente in der Bruchmechanik*. II. Aufl. Wiesbaden : Vieweg und Teubner, 2010
- [113] KUO, M. C. ; BOGY, D. B.: Plane solutions for the displacement and traction-displacement problems for anisotropic elastic wedges. In: *Journal of Applied Mechanics* 41 (1974), Nr. 1, S. 197–202
- [114] LABOSSIÈRE, P. E. W. ; DUNN, M. L.: Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (2001), Nr. 3, S. 609–634
- [115] LABOSSIÈRE, P. E. W. ; DUNN, M. L. ; CUNNINGHAM, S. J.: Application of bimaterial interface corner failure mechanics to silicon/glass anodic bonds. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), Nr. 3, S. 405–433
- [116] LAGUNEGRAND, L. ; LORRIOT, T. ; HARRY, R. ; WARGNIER, H. ; QUENISSET, J. M.: Initiation of free-edge delamination in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 10, S. 1315–1327
- [117] LANCASTER, J.F.: *Engineering catastrophes: Causes and effects of major accidents*. III. Aufl. Abington : Woodhead Publishing, 2005
- [118] LARMINIE, J. ; DICKS, A.: *Fuel Cell Systems Explained*. II. Aufl. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2003
- [119] LAZZARIN, P. ; TOVO, R.: A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches. In: *International Journal of Fracture* 78 (1996), Nr. 1, S. 3–19
- [120] LAZZARIN, P. ; ZAMBARDI, R.: A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. In: *International Journal of Fracture* 112 (2001), S. 275–298
- [121] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root - II: Detailed form of the stress intensity factors at the initial crack tip and conclusion. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000), S. 225–239
- [122] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root. I. Introduction and general form of the stress intensity factors at the initial crack tip. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000), S. 211–224
- [123] LEGUILLON, D.: A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. In: *International Journal of Fracture* 100 (1999), Nr. 1, S. 105–120

- [124] LEGUILLON, D.: A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris – Série IIb – Mechanics* 329 (2001), Nr. 2, S. 97–102
- [125] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 21 (2002), S. 61–72
- [126] LEGUILLON, D. ; LAURENCIN, J. ; DUPEUX, M.: Failure initiation in an epoxy joint between two steel plates. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 22 (2003), S. 509–524
- [127] LEGUILLON, D. ; MARION, G. ; HARRY, R. ; LECUYER, F.: The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates - analysis of two criteria. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), Nr. 3, S. 377–382
- [128] LEGUILLON, D. ; MURER, S.: Crack deflection in a biaxial stress state. In: *International Journal of Fracture* 150 (2008), S. 75–90
- [129] LEGUILLON, D. ; MURER, S.: A criterion for crack kinking out of an interface. In: *Key Engineering Materials* 385–387 (2008), S. 9–12
- [130] LEGUILLON, D. ; MURER, S. ; RECHO, N. ; LI, J.: Crack initiation at a v-notch under complex loadings – Statistical scattering. In: ELBOUJDANI, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Fracture ICF XII, July 12–17, 2009, Ottawa, Canada*, CD-ROM, 2009
- [131] LEGUILLON, D. ; PIAT, R.: Fracture of porous materials – Influence of the pore size. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 7, S. 1840–1853
- [132] LEGUILLON, D. ; QUESADA, D. ; PUTOT, C. ; MARTIN, E.: Prediction of crack initiation at blunt notches and cavities – Size effects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 15, S. 2420–2436
- [133] LEGUILLON, D. ; YOSIBASH, Z.: Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius. In: *International Journal of Fracture* 122 (2003), S. 1–21
- [134] LEKHNITSKII, S. G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco : Holden-Day, 1963
- [135] LEKHNITSKII, S. G.: *Anisotropic Plates*. New York : Gordon and Breach, 1968
- [136] LEMAITRE, J. ; DESMORAT, R.: *Engineering damage mechanics: Ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Berlin · Heidelberg · New York : Springer Verlag, 2005
- [137] LI, J. ; ZHANG, X. B.: A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), S. 505–523

- [138] LIN, C.-K. ; CHEN, A.-H. ; CHIANG, L.-K. ; CHYOU, Y.-P.: Numerical study of thermal stresses in an SOFC stack with mica seals. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [139] LINDEMANN, J. ; BECKER, W.: The tendency for free-edge delamination in laminates and its minimization. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 2, S. 233–242
- [140] LIU, C. I. ; CHUE, C. H.: On the stress singularity of dissimilar anisotropic wedges and junctions in antiplane shear. In: *Composite Structures* 73 (2006), Nr. 4, S. 432–442
- [141] LIU, S. ; CHAO, Y.: Variation of fracture toughness with constraint. In: *International Journal of Fracture* 124 (2003), Nr. 3-4, S. 113–117
- [142] MA, C. C. ; HOUR, B. L.: Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation. In: *International Journal of Solids and Structures* 25 (1989), Nr. 11, S. 1295–1309
- [143] MALZBENDER, J. ; KOPPITZ, T. ; GROSS, S. M. ; STEINBRECH, R. W.: Studies on the thermal expansion of glass-ceramic sealants. In: KILNER, J. A. (Hrsg.): *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2006
- [144] MALZBENDER, J. ; STEINBRECH, R. W. ; SINGEHEISER, L.: Advanced characterisation of SOFC behaviour. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [145] MANTIČ, V.: Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), Nr. 6, S. 1287–1304
- [146] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D.: Energetic conditions for interfacial failure in the vicinity of a matrix crack in brittle matrix composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), S. 6937–6948
- [147] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* (2010), S. 1297–305
- [148] MARTIN, E. ; POITOU, B. ; LEGUILLON, D. ; GATT, J. M.: Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack. In: *International Journal of Fracture* 151 (2008), Nr. 2, S. 247–268
- [149] MCCLINTOCK, F. A.: Ductile fracture instability in shear. In: *Journal of Applied Mechanics* 25 (1958), Nr. 4, S. 582–588

- [150] MENZLER, N. H. ; BATFALSKY, P. ; BLUM, L. ; BRAM, M. ; GROSS, S. M. ; HAANAPPEL, V. A. C. ; MALZBENDER, J. ; SHEMET, V. ; STEINBRECH, R. W. ; VINKE, I. C.: Studies of material interaction after long-term stack operation. In: KILNER, J. A. (Hrsg.): *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2006
- [151] MERTENS, H.: Festigkeitsnachweis. In: GROTE, K.-H. (Hrsg.) ; FELDHOUSEN, J. (Hrsg.): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. XXI. Aufl. Berlin · Heidelberg · New York : Springer, 2005
- [152] MIANNAY, D. P.: *Fracture Mechanics*. New York · Berlin · Heidelberg : Springer-Verlag, 1998
- [153] MINH, N. Q. ; TAKAHASHI, T.: *Science and Technology of Ceramic Fuel Cells*. Amsterdam : Elsevier, 1995
- [154] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Interlaminar stress concentrations in layered structures: Part I – A selective literature survey on the free-edge effect since 1967. In: *Journal of Composite Materials* 38 (2004), Nr. 12, S. 1037–1062
- [155] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Free-edge effects in composite laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 60 (2007), Nr. 1-6, S. 217–245
- [156] MOHAMMED, I. ; LIECHTHI, K.M.: Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), S. 735–764
- [157] MOURA, M. F. S. F. de ; CHOUSAL, J. A. G.: Cohesive and continuum damage models applied to fracture characterization of bonded joints. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 48 (2006), Nr. 5, S. 493–503
- [158] MÜLLER, A.: *Analyse und Bewertung von Fügungen am Beispiel keramischer Hochtemperatur-Brennstoffzellen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2005 (VDI-Fortschrittsbericht Nr. 296, Reihe 18)
- [159] MÜLLER, A. ; BECKER, W. ; STOLTEN, D. ; HOHE, J.: A hybrid method to assess interface debonding by finite fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 8, S. 994–1008
- [160] MÜLLER, A. ; GOSWAMI, S. ; BECKER, W. ; STOLTEN, D. ; HAART, L. G. J. de ; STEINBRECH, R. W.: Assessment of the sealing joints within SOFC stacks by numerical simulation. In: *Fuel Cells* 6 (2006), Nr. 2, S. 107–112
- [161] MÜLLER, A. ; GOSWAMI, S. ; HOHE, J. ; BECKER, W.: On the assessment of cracks within the interface of thin layers on a substrate. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 4, 2004, S. 288–289

- [162] MÜLLER, A. ; HOHE, J. ; BECKER, W.: Material- und Geometrieabhängigkeit der Spannungssingularitäten an Bimaterialkerben. In: DEUTSCHER VERBAND FÜR MATERIALFORSCHUNG UND -PRÜFUNG E. V. (Hrsg.): *DVM-Bericht 234: Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik*, 2002, S. 109–118
- [163] MÜLLER, A. ; HOHE, J. ; BECKER, W.: A closed-form analysis of material and geometry effects on stress singularities at unsymmetric bimaterial notches. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 2, 2003, S. 210–211
- [164] MÜLLER, A. ; HOHE, J. ; BECKER, W. ; STOLTEN, D. ; HAART, L. G. J. (Bert) de: Structural stress and sensitivity analysis revealing optimization potential of SOFC-stacks. In: HUIJSMANS, J. (Hrsg.): *5<sup>th</sup> European Solid Oxide Fuel Cell Forum* Bd. 2, European Fuel Cell Forum, Oberrohrdorf, 2002, S. 791–798
- [165] MÜLLER, R. ; KUHN, C.: A continuum phase field model for fracture. In: ELBOUJDAINI, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Fracture ICF XII, July 12–17, 2009, Ottawa, Canada*, CD-ROM, 2009
- [166] MUNZ, D. ; YANG, Y. Y.: Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), S. 857–861
- [167] MUNZ, D. ; YANG, Y. Y.: Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors. In: *International Journal of Fracture* 60 (1993), S. 169–177
- [168] MURAKAMI, Y. (Hrsg.): *Stress intensity factors handbook*. Bd. 1. Oxford : Pergamon Press, 1987
- [169] MURER, S. ; LEGUILLON, D.: Static and fatigue failure of quasi-brittle materials at a V-notch using a Dugdale model. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 29 (2010), S. 109–118
- [170] MUSSCHELISCHWILI: *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. München : Hanser, 1971
- [171] NAIRN, J. A.: The strain-energy release rate of composite microcracking – A variational approach. In: *Journal of Composite Materials* 23 (1989), Nr. 11, S. 1106–1129
- [172] NAIRN, J. A. ; LIU, Y. C.: On the use of energy methods for interpretation of results of single-fiber fragmentation experiments. In: *Composite Interfaces* 4 (1997), Nr. 5, S. 241–267
- [173] NAKAJO, A. ; WUILLEMIN, Z. ; HERLE, J. van ; FAVRAT, D.: Simulation of thermal stresses in anode-supported solid oxide fuel cell stacks. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008

- [174] NEUBER, H.: Zur Theorie der technischen Formzahl. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 7 (1936), S. 271–274
- [175] NGUYEN, B. N. ; KOEPEL, B. J. ; AHZI, S. ; KHALEEL, M. A. ; SINGH, P.: Crack growth in solid oxide fuel cell materials: From discrete to continuum damage modeling. In: *Journal of the American Ceramic Society* 89 (2006), Nr. 4, S. 1358–1368
- [176] NOVOZHILOV, V. V.: On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)* 33 (1969), Nr. 2, S. 212–222
- [177] O'DOWD, N. P. ; SHIH, C. F.: Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter – I. Structure of fields. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991), Nr. 8, S. 989–1015
- [178] OERTEL, D. ; FLEISCHER, T.: *Brennstoffzellen-Technologie: Hoffnungsträger für den Klimaschutz — Technische, ökonomische und ökologische Aspekte ihres Einsatzes in Verkehr und Energiewirtschaft*. Berlin : Erich Schmidt-Verlag, 2001
- [179] OGDEN, R. W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola : Dover Publications, 1997
- [180] PALANISWAMY, K. ; KNAUSS, W. G.: Propagation of a crack under general, in-plane tension. In: *International Journal of Fracture* 8 (1972), S. 114–117
- [181] PARVIZI, A. ; GARRETT, K. W. ; BAILEY, J. E.: Constrained cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-ply laminates. In: *Journal of Materials Science* 13 (1978), Nr. 1, S. 195–201
- [182] PETERSON, R. E.: Notch-sensitivity. In: SINES, G. (Hrsg.) ; WAISMAN, J. L. (Hrsg.): *Metal fatigue*. New York : Mc Graw Hill, 1959, S. 293–306
- [183] PICARD, D. ; LEGUILLON, D. ; PUTOT, C.: A method to estimate the influence of the notch-root radius on the fracture toughness measurement of ceramics. In: *Journal of the European Ceramic Society* 26 (2006), Nr. 8, S. 1421–1427
- [184] PILKEY, W. ; PILKEY, D.: *Peterson's stress concentration factors*. III. Aufl. Hoboken : John Wiley & Sons, Inc., 2008
- [185] POMMER, H. ; HAUSCHILDT, P. ; TEPPNER, R. ; HARTUNG, W.: Außenluftunabhängiges Antriebssystem für Uboote. In: *ThyssenKrupp techforum* 1 (2006), S. 64–69
- [186] PRADHAN, S. C. ; IYENGAR, N. G. R. ; KISHORE, N. N.: Finite element analysis of crack growth in adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 15 (1995), Nr. 1, S. 33–41



- [187] PRIEL, E. ; BUSSIBA, A. ; GILAD, I. ; YOSIBASH, Z.: Mixed mode failure criteria for brittle elastic V-notched structures. In: *International Journal of Fracture* 144 (2007), S. 247–265
- [188] PRIEL, E. ; YOSIBASH, Z. ; LEGUILLON, D.: Failure initiation at a blunt V-notch tip under mixed mode loading. In: *International Journal of Fracture* 149 (2008), Nr. 2, S. 143–173
- [189] PUCK, A. ; SCHÜRMANN, H.: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 7, S. 1045–1067
- [190] PUCK, A. ; SCHÜRMANN, H.: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 12-13, S. 1633–1662
- [191] PUGNO, N. ; CIAVARELLA, M. ; CORNETTI, P. ; CARPINTERI, A.: A generalized Paris' law for fatigue crack growth. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54 (2006), Nr. 7, S. 1333–1349
- [192] PUGNO, N. M.: Dynamic quantized fracture mechanics. In: *International Journal of Fracture* 140 (2006), Nr. 1-4, S. 159–168
- [193] PUGNO, N. M. ; RUOFF, R. S.: Quantized fracture mechanics. In: *Philosophical Magazine* 84 (2004), S. 2829–2845
- [194] QIAN, Z. ; AKISANYA, A. R.: An experimental investigation of failure initiation in bonded joints. In: *Archive of Applied Mechanics* 46 (1998), S. 4895–4904
- [195] QIAN, Z. Q. ; AKISANYA, A. R.: An investigation of the stress singularity near the free edge of scarf joints. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 18 (1999), Nr. 3, S. 443–463
- [196] QUESADA, D. ; LEGUILLON, D. ; PUTOT, C.: Multiple failures in or around a stiff inclusion embedded in a soft matrix under a compressive loading. In: *European Journal of Mechanics A/Solids* 28 (2009), Nr. 4, S. 668 – 679
- [197] QUESADA, D. ; PICARD, D. ; PUTOT, C. ; LEGUILLON, D.: The role of the interbed thickness on the step-over fracture under overburden pressure. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 46 (2009), Nr. 2, S. 281–288
- [198] RAMTEKKAR, G. S. ; DESAI, Y. M.: On free-edge effect and onset of delamination in FRPC laminates using mixed finite element model. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 28 (2009), Nr. 3, S. 317–341
- [199] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton : CRC Press, 2004

- [200] REEDY, E. D. ; GUESS, T. R.: Comparison of butt tensile strength data with interface corner stress intensity factor prediction. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 21, S. 2929–2936
- [201] REEDY, E. D. ; GUESS, T. R.: Interface corner failure analysis of joint strength: Effect of adherend stiffness. In: *International Journal of Fracture* 88 (1997), S. 305–314
- [202] REIFSNIDER, K. ; HUANG, X. ; JU, G. ; FESHLER, M. ; AN, K.: Mechanics of composite materials in fuel cell systems. In: *Mechanics of Composite Materials* 41 (2005), Nr. 1, S. 1–8
- [203] RICE, J. R.: A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 2, S. 379–386
- [204] RIETVELD, B.: SOFC development in Europe. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [205] RITCHIE, R. O. ; KNOTT, J. F. ; RICE, J. R.: On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21 (1973), S. 395–410
- [206] RÖSSLER, E.: *Die neuen deutschen U-Boote*. Bonn : Bernard & Graefe, 2004
- [207] RYBICKI, E. F. ; KANNINEN, M. F.: A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), S. 931–938
- [208] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Burlington · Oxford : Academic Press, 2009
- [209] SCHMITT-THOMAS, K. G.: *Integrierte Schadensanalyse – Technikgestaltung und das System des Versagens*. II. Aufl. Berlin · Heidelberg · New York : Springer, 2005
- [210] SCHWAB, K.: *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Mechanik geschichteter oxidkeramischer Hochtemperaturbrennstoffzellen unter thermischer und chemischer Beanspruchung*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1998 (VDI-Fortschrittsbericht Nr. 397, Reihe 6)
- [211] SCHWICKERT, T.: *Fügen von Hochtemperatur-Brennstoffzellen*. Aachen : Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 2002. – Elektronische Publikation der Hochschulbibliothek der RWTH Aachen

- [212] SEWERYN, A. ; ŁUKASZEWICZ, A.: Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), S. 1487–1510
- [213] SEWERYN, A. ; MRÓZ, Z.: A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading. In: *Engineering Fracture Mechanics* 51 (1995), Nr. 6, S. 955–973
- [214] SEWERYN, A. ; POSKROBKO, S. ; MRÓZ, Z.: Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading. In: *Journal of Engineering Mechanics* 123 (1997), Nr. 6, S. 535–543
- [215] SHEPPARD, A. ; KELLY, D. ; TONG, L. Y.: A damage zone model for the failure analysis of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 6, S. 385–400
- [216] SIH, G. C.: Introductory chapter: A special theory of crack propagation. In: SIH, G. C. (Hrsg.): *Mechanics of fracture vol. I – Methods of analysis and solutions of crack problems*. Alphen aan den Rijn : Noordhoff International Publishing, 1973, S. XXI–XLV
- [217] SIH, G. C.: Some basic problems in fracture mechanics and new concepts. In: *Engineering Fracture Mechanics* 5 (1973), Nr. 2, S. 365–377
- [218] SIH, G. C.: Strain energy density and surface layer energy for blunt cracks or notches. In: SIH, G. C. (Hrsg.): *Mechanics of fracture vol. V – Stress analysis of notch problems*. Alphen aan den Rijn : Noordhoff International Publishing, 1978, S. XIII–CX
- [219] SINCLAIR, G. B.: Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 66 (1999), Nr. 2, S. 556–560
- [220] SNEDDON, I. N. ; LOWENGRUB, M.: *Crack problems in the classical theory of elasticity*. New York : John Wiley & Sons, 1969
- [221] SPELLUCCI, P.: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1993
- [222] STOLTEN, D.: *Grundlagen und Technik der Brennstoffzellen – Skriptum zu Vorlesung und Übung*. Lehrstuhl für Brennstoffzellen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2002
- [223] SURDOVAL, W.: SOFC development in the USA. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008

- [224] SUWITO, W. ; DUNN, M. L. ; CUNNINGHAM, S. J.: Fracture initiation at sharp notches in single crystal silicon. In: *Journal Of Applied Physics* 83 (1998), Nr. 7, S. 3574–3582
- [225] SUWITO, W. ; DUNN, M. L. ; CUNNINGHAM, S. J. ; READ, D. T.: Elastic moduli, strength, and fracture initiation at sharp notches in etched single crystal silicon microstructures. In: *Journal of Applied Physics* 85 (1999), Nr. 7, S. 3519–3534
- [226] TAYLOR, D.: Geometrical effects in fatigue: A unifying theoretical model. In: *International Journal of Fatigue* 21 (1999), S. 413–420
- [227] TAYLOR, D.: *The theory of critical distances: A new perspective in fracture mechanics*. Oxford · Amsterdam : Elsevier, 2007
- [228] TAYLOR, D.: The theory of critical distances. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 1696–1705
- [229] TAYLOR, D. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N.: The fracture mechanics of finite crack extension. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 7, S. 1021–1038
- [230] THEOCARIS, P. S.: The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite plate. In: *International Journal Of Engineering Science* 12 (1974), Nr. 2, S. 107–120
- [231] TIMOSHENKO, S.P.: *History of strength of materials: With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York : Dover Publications, 1983
- [232] TONG, L.: Strength of adhesively bonded single-lap and lap-shear joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 20, S. 2601–2616
- [233] TOOREN, M. J. L. van ; KRAKERS, L. A.: A generalized stress singularity approach for material failure prediction and its application to adhesive joint strength analysis. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 20 (2006), Nr. 9, S. 981–995
- [234] TSAI, S. W. ; HAHN, H. T.: *Introduction to Composite Materials*. Lancaster : Technomic, 1980
- [235] UJIIE, T.: Status of national project for SOFC development in Japan. In: STEINBERGER-WILCKENS, R. (Hrsg.): *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2008
- [236] U.S. DEPARTMENT OF ENERGY – OFFICE OF FOSSIL ENERGY (Hrsg.): *Fuel Cell Handbook*. VII. Aufl. EG & G Technical Services, Inc., 2004
- [237] VIELSTICH, W. (Hrsg.) ; GASTEIGER, H. (Hrsg.): *Handbook of Fuel Cells: Advances in Electrocatalysis, Materials, Diagnostics and Durability*. Chichester : John Wiley & Sons, 2009

- [238] VIELSTICH, W. (Hrsg.) ; LAMM, A. (Hrsg.) ; GASTEIGER, H. A. (Hrsg.): *Handbook of Fuel Cells: Fundamentals, Technology, Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 2003
- [239] VINKE, I. C. ; ERBEN, R. ; SONG, R.-H. ; KIVIAHO, J.: Installation and Operation of kW-class stacks from Jülich in external laboratories. In: KILNER, J. A. (Hrsg.): *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European SOFC Forum, Lucerne, Switzerland*, CD-ROM, 2006
- [240] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 15 (1938), S. 41–47
- [241] WADDOUPS, M. E. ; EISENMANN, J. R. ; KAMINSKI, B. E.: Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), S. 446–454
- [242] WANG, A. S. D. ; CROSSMAN, F. W.: Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates part 1. An energy method. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), S. 71–87
- [243] WANZENBERG, E.: *Herstellung und Charakterisierung von dünnen Elektrolytschichten auf mikrostrukturell modifizierten Anodensubstraten für die Hochtemperatur-Brennstoffzelle*. Zentralbibliothek und Verlag des Forschungszentrums Jülich, 2003 (Berichte des Forschungszentrums Jülich Nr. 4027)
- [244] WHITNEY, J. M. ; NUISMER, R. J.: Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), S. 253–265
- [245] WIEGHARDT, K.: Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55 (1907), S. 60–103
- [246] WIENER, F.: *Entwicklung eines Dichtungskonzepts mit elastischer Komponente für die oxidkeramische Brennstoffzelle (SOFC)*. Zentralbibliothek und Verlag des Forschungszentrums Jülich, 2006 (Berichte des Forschungszentrums Jülich Nr. 4244)
- [247] WILLIAMS, M. L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), Nr. 4, S. 526–528
- [248] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin · Heidelberg · New York : Springer-Verlag, 2001
- [249] YOSIBASH, Z. ; ADAN, O. ; SCHNECK, R. ; ATLAS, H.: Thermo-mechanical failure criterion at the micron scale in electronic devices. In: *International Journal of Fracture* 122 (2003), S. 47–64

- 
- [250] YOSIBASH, Z. ; BUSSIBA, A. ; GILAD, I.: Failure criteria for brittle elastic materials. In: *International Journal of Fracture* 125 (2004), S. 307–333
- [251] YOSIBASH, Z. ; PRIEL, E. ; LEGUILLON, D.: A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), S. 291–312
- [252] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. VI. Aufl. Oxford · Burlington : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- [253] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. VI. Aufl. Oxford · Burlington : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005



## Bisher sind in dieser Reihe erschienen

### **Band 1**

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

### **Band 2**

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

### **Band 3**

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikroheterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

### **Band 4**

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

### **Band 5**

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

### **Band 6**

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

### **Band 7**

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

### **Band 8**

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

### **Band 9**

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

### **Band 10**

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3



**Band 11**

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

**Band 12**

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

**Band 13**

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

**Band 14**

Hyperelastic dynamics in physical and material space

S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

**Band 15**

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior

V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

**Band 16** Ein mischungsbasiertes Materialmodell zum Knochenumbau

R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

**Band 17**

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

**Band 18**

Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

**Band 19**

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8

**Band 20**

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4

**Band 21**

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

C. Sator, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-21-1

Die Entwicklung hochbeanspruchter Strukturen erfordert leistungsfähige Bewertungskonzepte für Spannungskonzentrationen. Durch Kombination klassischer Versagenshypothesen mit einem energetischen Bruchkriterium im Rahmen des Konzeptes der Bruchmechanik finiter Risse ermöglicht ein unlängst vorgeschlagenes hybrides Versagensmodell einen universellen Zugang zur spröden Rissbildung.

In dieser Arbeit wird das Modell mittels einer neuen Finite-Elemente-Analyseprozedur in verallgemeinerter Form bereitgestellt. Durch Vergleich mit der neuen Formulierung konnten anhand von Kerbproben bekannte und neu entwickelte, auf asymptotischen Entwicklungen basierende, Lösungen validiert werden.

Auch der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen an Proben aus PMMA zeigte gute Übereinstimmung. Gleiches gilt für die Bewertung von CFK-Laminaten hinsichtlich Delaminationsversagen an freien Rändern. Weiterhin wurde das Modell zur Bewertung von Fügungen in Hochtemperatur-Brennstoffzellenstacks angewendet, wobei sich das neue Verfahren als ein sehr leistungsfähiges Werkzeug erwiesen hat.